

Flächen (vom nicht allgemeinen Typ) in \mathbb{P}^4

Hans-Christian Graf von Bothmer, Cord Erdenberger
und Katharina Ludwig

24. Februar 2004

1 Motivation und Gradschranken

Sei S eine glatte projektive Fläche. Dann gibt es eine Einbettung $\varphi : S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ mit $N \leq 5$.

Beweis. Da S projektiv ist, gibt es eine Einbettung $\varphi : S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Falls $N > 5$ ist, betrachte man die Sekantenvarietät $\text{Sec}_2 S \subset \mathbb{P}^N$. Es ist

$$\dim \text{Sec}_2 S \leq 2 + 2 + 1 = 5.$$

Projiziert man von einem Punkt außerhalb $\text{Sec}_2 S$, so wird das Bild von S im \mathbb{P}^{N-1} wieder glatt. Dies ist möglich solange $N \geq 5$ ist. \square

Also ist eine Fläche $S \subset \mathbb{P}^5$ nichts besonderes. Wann kann man $S \subset \mathbb{P}^4$ erreichen?

Theorem 1.1 ([EP89]) *Es existiert eine natürliche Zahl $d_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$S \subset \mathbb{P}^4 \text{ nicht vom allgemeinen Typ} \implies \deg S \leq d_0$$

Insbesondere gibt es nur endlich viele Familien solcher Flächen.

Beweisskizze.

(i) Für $S \subset \mathbb{P}^4$ gilt die Doppelpunktformel

$$d^2 - 5d - 10(\pi - 1) + 2(6\chi - K^2) = 0$$

wobei $d = \deg S$ der Grad, π das Schnittgeschlecht, χ die Euler Charakteristik und K^2 der Selbstschnitt des kanonischen Divisors von S ist. [Har77, Appendix A, Example 4.1.3.]

(ii) Bis auf gut verstandene Fälle vom Grad ≤ 5 gilt

$$K^2 \leq 0 \text{ und } 6\chi - K^2 \geq 0$$

für Flächen von nicht allgemeinen Typ.

$$\implies \pi \geq \frac{d^2 - 5d + 10}{10}$$

(iii) Sei $C = S \cap \mathbb{P}^3$ ein allgemeiner Hyperebenenschnitt von S . Dann ist C eine glatte Raumkurve vom Grad d und Geschlecht π . Für solche im \mathbb{P}^3 gilt Halphens Schranke [EP89]

$$\pi \leq 1 + \frac{d^2 + s(s-4)d}{2s},$$

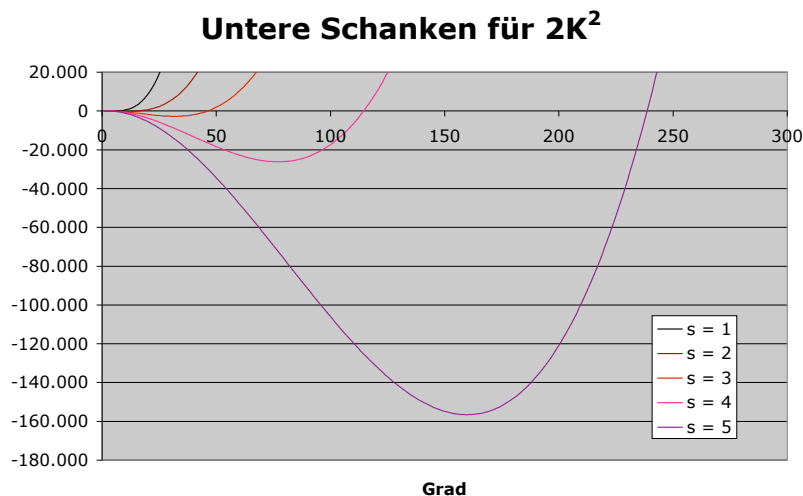
wobei s die Postulation von C ist, d.h. der kleinste Grad einer Hyperfläche, die C enthält. In vielen Fällen ist die Postulation von C die gleiche wie die von S . Eine notwendige Bedingung dafür liefert Roths Lemma [Rot37]. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind und $s \geq 6$ ist, dann widersprechen sie die beiden Schranken für π bei großen d . Für $s \geq 6$ ist d also beschränkt.

(iv) Durch Betrachten von generische Initialidealen findet man ein Polynom $P_s(d)$ mit Leitterm $\frac{d^3}{6s^2}$, so dass für s mit $d > (s-1)^2 + 1$

$$\chi(\mathcal{O}_S) \geq P_s(d)$$

gilt. Zusammen mit der Doppelpunktformel und Halphens Schranke erhält man dann

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2K^2 = d^2 - 5d - 10(\pi - 1) + 12\chi(\mathcal{O}_S) \\ &\geq d^2 - 5d - 10 \left(\frac{d^2 + s(s-4)d}{2s} \right) + 12P_s(d) \end{aligned}$$



$\implies d$ beschränkt für $s \leq 5$.

□

Der Originalbeweis von Ellingsrud und Peskine [EP89] liefert $d_0 \leq 10000$. Die Idee, generische Initialideale zu betrachten, stammt von Braun und Fløystad [BF94]. Sie zeigen $d_0 \leq 105$. Genaueres Studium der generischen Initialideale [DS00] ergibt schließlich

$$d_0 \leq 52.$$

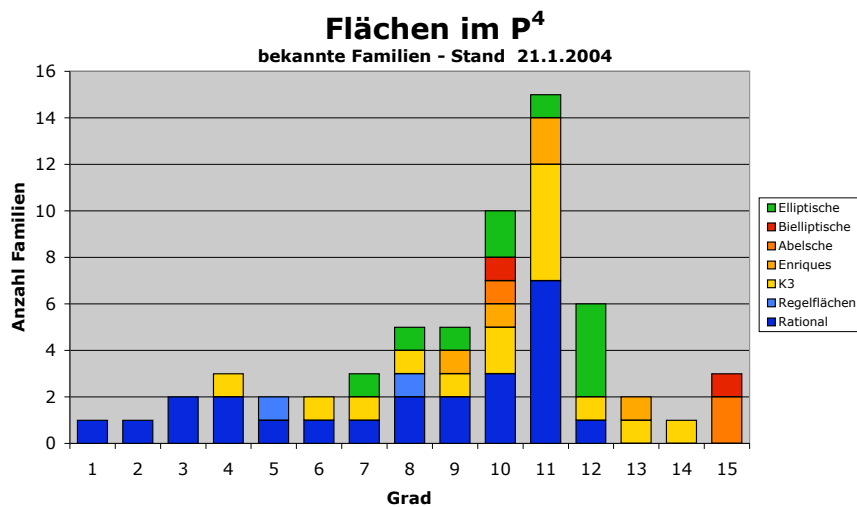
2 Klassifikation

Bekannt sind zur Zeit folgende Teilklassifikationen für glatte Flächen vom nicht allgemeinen Typ im \mathbb{P}^4 :

- $s = 1, 2$ klassisch
- $s = 3$ Roth [Rot37]/Aure [Aur90]/Koelblen [Koe92]
- $d \leq 9$ via Adjunktion (Eine Übersicht findet sich in [DS00])
- $d = 10$ via Linkage (Popescu/Ranestad [PR96])

3 Konstruktion

Um d_0 von unten zu beschränken, versucht man, explizit Flächen von nicht allgemeinem Typ in \mathbb{P}^4 zu konstruieren. Bis jetzt hat man folgende Familien gefunden ([DES93] für alle bis dahin bekannten Familien, [Sch96], [ADH⁺97], [ADS98], [AR02]):



$$\implies d_0 \geq 15$$

Zur Konstruktion wurden bislang folgende Methoden angewendet:

- (i) Angabe von expliziten Linearsystemen auf bekannten Flächen
- (ii) Adjunktion
- (iii) Linkage
- (iv) Schnitte von Rang 2 Vektorbündeln auf \mathbb{P}^4
- (v) Syzygien

Mit expliziten Linearsystemen und Adjunktion findet man Flächen bis $d = 9$. Linkage liefert Beispiele im Grad 10. Das Horrocks-Mumford-Bündel liefert eine Fläche mit $d = 10$, die zu einer Fläche vom Grad 15 gelinkt ist. Mit der Syzygienmethode schließlich, kann man alle bisher bekannten Flächen konstruieren. Dabei konstruiert man mit Hilfe von Syzygien spezielle Vektorbündel F, G mit $\text{rang } F = \text{rang } G + 1$ und eine allgemeine Abbildung $\phi : F \rightarrow G$. Wenn ϕ auf einer Fläche S im Rang abfällt, so hat diese Fläche Invarianten, die sich aus Invarianten von F und G ergeben. Falls S auch noch glatt ist, hat man eine neue Fläche gefunden. Zum Überprüfen der Dimensionsbedingung und der Glattheit verwendet man Computeralgebra Programme.

4 Endliche Körper

Computeralgebra Programme rechnen oft über kleinen endlichen Körpern. Dies hat zunächst praktische Gründe, da man Elemente aus kleinen endlichen Körpern leicht speichern kann. Während über endlichen Körpern alle

Elemente mit gleich viel Speicherplatz auskommen, können Zähler und Nenner beim Rechnen über \mathbb{Q} beliebig groß werden.

Ein weiter Vorteil ist jedoch, dass man über endlichen Körpern Gleichungssysteme leichter lösen kann. Oft kann man eine Nullstelle durch Raten finden:

Beispiel Sei $f \in \mathbb{F}_p[x_1 \dots x_n]$ ein Polynom. Um eine Nullstelle zu finden, wählen wir x_1, \dots, x_n zufällig. Heuristisch erhalten wir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{in ca. } \frac{1}{p} \text{ der Fälle} \\ \neq 0 & \text{in ca. } \frac{p-1}{p} \text{ der Fälle} \end{cases} .$$

Für eine exakte Version dieser Heuristik siehe [vBS04].

In vielen Beispielen beobachtet man außerdem für Ideale $I \subset \mathbb{F}_p[x_1 \dots x_n]$ mit $V(I) \subset \mathbb{A}^n$ von Kodimension k , daß

$$\frac{\# \text{ Punkte in } V(I)}{\# \text{ Punkte in } \mathbb{A}^n} \approx \frac{1}{p^k}$$

ist. Wenn man also eine Varietät kleiner Kodimension im \mathbb{A}^n hat, so kann man über einem kleinen endlichen Körper hoffen, Punkte auf dieser Varietät durch Zufall zu finden.

Mit dieser Methode findet Schreyer [Sch96] vier Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs mit $d = 11$ und $\pi = 10$ über \mathbb{F}_3 . Dabei realisiert er die Menge der Vektorbündel mit den gewünschten Invarianten als Varietät mit niedriger Kodimension in einem hochdimensionalen projektiven Raum und findet Beispiele durch zufälliges Suchen. Ebenso findet Abo 2003 (unveröffentlicht) eine rationale Fläche vom Grad 12 über \mathbb{F}_5 .

5 Was ist mit Charakteristik 0 ?

Im Allgemeinen ist man nicht an Flächen über Körpern endlicher Charakteristik interessiert. Schreyer gibt jedoch in [Sch96] eine Methode an, mit der man von Lösungen eines Gleichungssystems in endlicher Charakteristik auf die Existenz von Lösungen in Charakteristik Null schließen kann.

Sei dazu X eine determinantielle Varietät über $\text{Spec } \mathbb{Z}$ und $x \in X_{\mathbb{F}_p}$ ein spezieller Punkt. Falls nun $T_{X,x}$ von erwarteter Dimension ist, so ist X glatt in x und x liftet nach Charakteristik Null.

Zur Konstruktion von Flächen im \mathbb{P}^4 verwendet man als X das Hilbertschema der Flächen in \mathbb{P}^4 mit vorgegebenem Hilbertpolynom und als $x \in X_{\mathbb{F}_p}$ eine irgendwie konstruierte Fläche. Die Dimension des Tangentialraums $T_{X,x}$ berechnet man dann mit Hilfe von infinitesimalen Deformationen.

6 Unsere Fläche

Um neue rationale Flächen im \mathbb{P}^4 zu finden, haben wir versucht, explizite Linearsysteme auf \mathbb{P}^2 mit vorgegebenem Basisort über \mathbb{F}_2 durch Raten zu finden. Dabei kann man aus der Struktur des Basisorts die Invarianten der Fläche bestimmen:

Beispiel Gäbe es fünf Neuntiken durch einen Tripelpunkt, 14 Doppelpunkte und 5 Einfachpunkte, so würden diese eine Aufblasung von \mathbb{P}^2 in den \mathbb{P}^4 abbilden. Falls dieses Bild eine glatte Fläche S wäre, müsste S rational mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ sein.

Die möglichen Linearsysteme zu vorgegebenen Invarianten d , π und K^2 findet man kombinatorisch. Wir verwenden ein Verfahren zur ganzzahligen Optimierung mit Hilfe von Gröbner Basen [CLO98, Chapter 8]

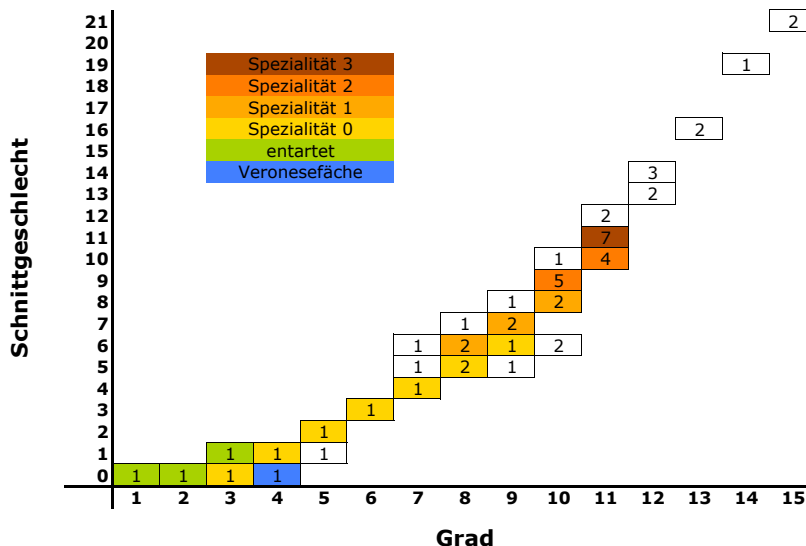
Problem: Für allgemeine Vielfachpunkte X erwartet man

$$h^0(I_X(a)) = 5 - \underbrace{(d - \pi + 3)}_{\text{Spezialität}}$$

viele linear unabhängige a -tiken mit Basisort X . In unserem Fall erwarten wir also nur 2 und nicht 5 Neuntiken mit dem gewünschten Basisort. Folgende Graphik zeigt die bekannten Familien von Flächen nicht allgemeinen Typs im \mathbb{P}^4 nach Grad und Schnittgeschlecht aufgetragen. Die Zahlen in den Kästchen geben an, wieviele Familien mit diesen Invarianten bekannt sind. Farblich unterlegt sind die Orte, zu deren Invarianten es rationale Flächen gibt.

Flächen im \mathbb{P}^4

Spezialität von rationalen Flächen



Lösung: Betrachte die Varität

$$X = \{(p, q, r) \mid h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5\} \subset \text{Hilb}_1 \times \text{Hilb}_{14} \times \text{Hilb}_5.$$

X hat erwartete Kodimension $5 \cdot \text{Spezialität} = 15$. Wir wählen also ca. $2^{15} = 32768$ zufällige Punkte $x = (p, q, r)$ in $\text{Hilb}_1 \times \text{Hilb}_{14} \times \text{Hilb}_5$ und hoffen dann ein $x \in X$ zu finden.

Problem: $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat nur 7 Punkte. Wir können also gar nicht einen Tripelpunkt, 14 Doppelpunkte und 5 Einfachpunkte mit rationalen Koordinaten über \mathbb{F}_2 wählen. Erst recht finden wir nicht 32768 verschiedene solche Punktombinationen.

Lösung: Wir wählen $s \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{2^k})$ und wenden Frobenius an. Wir erhalten dann ein Ideal von bis zu k Punkten, das über \mathbb{F}_2 definiert ist.

Mit diesen Ideen und dem Computeralgebra Programm Macaulay 2 [GS] haben wir tatsächlich einige spezielle $(p, q, r) \in \text{Hilb}_1 \times \text{Hilb}_{14} \times \text{Hilb}_5$ mit $h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$ gefunden. Ebenfalls mit Macaulay 2 kann man dann das Bild der durch die jeweiligen 5 Neuntiken definierten rationalen Abbildung

$$\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^4$$

ausrechnen. Mehrfach erhalten wir glatte Flächen mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ über \mathbb{F}_2 .

Mit Macaulay konnten wir außerdem ausrechnen, dass man die 20 Basispunkte genau in einem 15-kodimensionalen Raum infinitesimal verschieben kann, ohne dass die Bedingung $h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$ verloren geht. Dies zeigt, dass $T_{X,x}$ von erwarteter Kodimension ist und die Konfiguration der Basispunkte nach Charakteristik Null liftet und dort ebenfalls $h^0(I_{3p+2q+r}(9)) = 5$ erfüllt. Wir erhalten also auch über Charakteristik Null rationale Abbildungen

$$\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^4.$$

die durch Neuntiken mit dem gewünschten Basisort definiert sind. Da die Bedingung "Bild von ϕ ist eine glatte Fläche" offen auf $X/\text{Spec } \mathbb{Z}$ ist und wir Beispiele mit diesen Eigenschaften über \mathbb{F}_2 gefunden haben, muss es auch über Charakteristik Null solche Abbildungen ϕ geben, deren Bild eine glatte rationale Fläche mit den gewünschten Invarianten ist.

7 Warum sind diese Flächen neu?

Außer der von uns konstruierten Flächen gibt es noch mindestens drei weitere Familien rationaler Flächen mit $d = 11$, $\pi = 11$ und $K^2 = -11$ im \mathbb{P}^4 . Diese haben jeweils 0, 1 oder ∞ -viele 6-Sekanten [DES93]. Unsere Flächen haben jedoch zwei 6-Sekanten. Außerdem haben unsere Flächen Postulation $s = 4$ während die drei bisher bekannten Familien Postulation $s = 5$ haben.

Literatur

- [ADH⁺97] A. Aure, W. Decker, K. Hulek, S. Popescu, and K. Ranestad. Syzygies of abelian and bielliptic surfaces in \mathbb{P}^4 . *Int. J. Math.*, 8(7):849–919, 1997.
- [ADS98] Hirotachi Abo, Wolfram Decker, and Nobuo Sasakura. An elliptic conic bundle in \mathbf{P}^4 arising from a stable rank-3 vector bundle. *Math. Z.*, 229(4):725–741, 1998.
- [AR02] Hirotachi Abo and Kristian Ranestad. Irregular elliptic surfaces of degree 12 in the projective fourspace. math.AG/0210317, 2002.
- [Aur90] Alf Bjørn Aure. The smooth surfaces on cubic hypersurface in \mathbf{P}^4 with isolated singularities. *Math. Scand.*, 67(2):215–222, 1990.
- [BF94] Robert Braun and Gunnar Fløystad. A bound for the degree of smooth surfaces in \mathbf{P}^4 not of general type. *Compositio Math.*, 93(2):211–229, 1994.

- [CLO98] David Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Using algebraic geometry*, volume 185 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [DES93] Wolfram Decker, Lawrence Ein, and Frank-Olaf Schreyer. Construction of surfaces in \mathbf{P}_4 . *J. Algebraic Geom.*, 2(2):185–237, 1993.
- [DS00] Wolfram Decker and Frank-Olaf Schreyer. Non-general type surfaces in \mathbf{P}^4 : some remarks on bounds and constructions. *J. Symbolic Comput.*, 29(4-5):545–582, 2000. Symbolic computation in algebra, analysis, and geometry (Berkeley, CA, 1998).
- [EP89] Geir Ellingsrud and Christian Peskine. Sur les surfaces lisses de \mathbf{P}_4 . *Invent. Math.*, 95(1):1–11, 1989.
- [GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Math. 52. Springer, Heidelberg, 1977.
- [Koe92] Laurent Koelblen. Surfaces de \mathbf{P}_4 tracées sur une hypersurface cubique. *J. Reine Angew. Math.*, 433:113–141, 1992.
- [PR96] Sorin Popescu and Kristian Ranestad. Surfaces of degree 10 in the projective fourspace via linear systems and linkage. *J. Algebraic Geom.*, 5(1):13–76, 1996.
- [Rot37] L. Roth. On the projective classification of surfaces. *Proc. London Math. Soc.*, 42:143–170, 1937.
- [Sch96] Frank-Olaf Schreyer. Small fields in constructive algebraic geometry. In *Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994)*, volume 179 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 221–228. Dekker, New York, 1996.
- [vBS04] H.-Chr. Graf v. Bothmer and F.O. Schreyer. A quick and dirty irreducibility test for multivariate polynomials over \mathbb{F}_q . Work in progress, 2004.