

Syzygien von glatten Raumkurven

Hans-Christian v.Bothmer

Diplomarbeit
am mathematischen Institut der
Universität Bayreuth

Betreut durch
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer

21. August 1995

Zusammenfassung

We consider the syzygytableau of a spacecurve C , an invariant, which is calculated from the minimal free resolution of I_C . First we give some restrictions, that are satisfied by syzygytableaus of smooth, irreducible, reduced spacecurves. All tableaus that satisfy these restrictions are enumerated for spacecurves of degree ≤ 8 . Then for some of these tableaus Spacecurves are constructed. We find equations for at least one spacecurve of every possible genus and degree ≤ 8 . Finally we show, that there is a connection between high-secant-curves of C and the syzygytableau of C .

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	3
§1	Kurven, Syzygienzahlen und Motivation	4
§2	Notation	6
I	Restriktion	8
§1	Das generische Initialideal	9
§2	Cooks Liste von generischen Initialidealen	14
§3	Kürzen	17
§4	Reduzible Kurven	19
§5	Eingebettete Punkte	22
II	Konstruktion	26
§1	ACM Kurven	27
§2	Das Konstruktionsverfahren	29
§3	Generische Matrizen	31
§4	2 x n Matrizen	33
III	Geometrische Interpretation	36
§1	Liaison	37
§2	Sekantenkurven	40
§3	Die Erzeuger eines Ideals	46
§4	Geometrische Konstruktion	47
A	Beispiele	48

B Pascal Files	61
C Macaulayscripts	66
D Tabellen	83
E Selbständigkeitserklärung	87
Literaturverzeichnis	88

Kapitel 0

Einleitung

§1 Kurven, Syzygienzahlen und Motivation

Bei der Klassifikation von Raumkurven bedient man sich zahlreicher Invarianten. In [Ha] findet man zum Beispiel folgendes Diagramm:

Es gibt für die Invarianten Grad (d) und Geschlecht (g) an, zu welchen Kombinationen es glatte, irreduzible Raumkurven gibt. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit feineren Invarianten, den Syzygienzahlen. Zu jeder Kurve können wir (z.B. mit `macaulay`) eine eindeutig bestimmte Zahl r und eine eindeutig bestimmte $4 \times r$ -Matrix von natürlichen Zahlen berechnen. Diese Matrix nennen wir Syzygientableau, die in ihr enthaltenen Zahlen heißen Syzygienzahlen.

Die Syzygienzahlen sind nun feinere Invarianten als Grad und Geschlecht, weil es zu jedem Paar (d, g) mehrere Kurven mit verschiedenem Syzygientableau geben kann. Alle Kurven mit gleichem Syzygientableau haben andererseits das gleiche Geschlecht und den gleichen Grad.

In kleinen Graden jedoch gibt es zu jedem Grad und Geschlecht nur ein Syzygientableau:

1.1 Beispiel Folgende Tabelle enthält alle Syzygientableaus von irreduziblen glatten Kurven im Grad ≤ 3 .

Kurve	Grad	Geschlecht	Syzygientableau
Gerade	1	0	1 2 1 -
ebene Konic	2	0	1 1 - - - 1 1 -
twisted Kubic	3	0	1 - - - - 3 2 -
ebene Kubic	3	1	1 1 - - - - - - - 1 1 -

Nicht alle $4 \times r$ -Tableaus kommen als Syzygientableaus glatter Raumkurven vor.

Daher geben wir in Kapitel I zunächst eine möglichst kleine Menge von Tableaus an, die alle Syzygientableaus von irreduziblen, glatten Kurven mit Grad kleinergleich acht enthält. Diese Menge wird immerhin so klein sein, daß es zu jedem Paar (d,g) nur noch endlich viele $4 \times r$ -Tableaus (mögliche Syzygientableaus) gibt. Zu einigen Paaren gibt es dann gar keine möglichen Tableaus mehr. Wir zeigen damit, daß es keine Kurven mit diesem Grad und Geschlecht geben kann. Wir finden so nocheinmal genau die weißen Punkte in Hartshornes Diagramm.

In Kapitel II konstruieren wir dann gezielt Kurven mit bestimmten Syzygientableaus. Diese nennen wir dann "echte" Tableaus. Für manche Kombinationen von Grad und Geschlecht kann gezeigt werden, daß alle möglichen Tableaus (aus Kapitel I) auch echte Tableaus sind. Für diese Kombinationen ist die Verfeinerung nach Syzygienzahlen abgeschlossen. Für andere Kombinationen hingegen bleiben noch mögliche Tableaus übrig, die sich in "nicht gefundene echte" und falsche" Tableaus aufteilen. Immerhin finden wir für jeden Grad ≤ 8 und jedes Geschlecht, das nach Hartshornes Diagramm möglich ist, eine Kurve.

In Kapitel III wollen wir dann untersuchen, was Kurven mit gleichem Syzygientableau geometrisch gemeinsam haben, bzw was Kurven mit verschiedenem Tableau voneinander unterscheidet. Es stellt sich heraus, daß sich die Existenz besonderer Sekantenkurven (z.B. eine Gerade, die die Kurve fünf Mal schneidet oder eine Konik die die Kurve acht Mal schneidet) sich in den Syzygienzahlen bemerkbar macht. So haben z.B alle Kurven vom Grad 8 und Geschlecht 5 mit einer bestimmten Sekantenkonfiguration ein und das selbe Bettitableau A, währen alle Kurven vom gleichen Grad und Geschlecht mit einer anderen Sekantenkonfiguration ein anderes Bettitableau B haben.

Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei M.Cook und G.Fløystad für die anregenden Gespräche während ihres Aufenthaltes in Bayreuth bedanken.

§2 Notation

In dieser Arbeit bezeichnet $S = K[a, b, c, d]$ den Polynomring in vier Variablen über einem Körper der Charakteristik 0. $I_C \in S$ ist das homogene Ideal einer Kurve $C \in \mathbb{P}^3$, wobei C lokal Cohen-Macaulay sein soll (d.h. alle Komponenten haben die Kodimension 2). Weiter bezeichnet X einen vollständigen Durchschnitt der C enthält und $I_\Gamma = (I_X : I_C)$ das Ideal der zu C durch X liierten Kurve Γ .

Nach Hilberts Syzygiensatz hat S/I_C eine endliche, freie minimale Auflösung. Da I_C saturiert und das Ideal einer Raumkurve ist, gibt es eine minimale Auflösung der Länge ≤ 3 :

$$S/I_C \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0,$$

wobei die F_i freie endlich erzeugte S -Moduln sind. Daher können wir Funktionen B_1, B_2 und B_3 von \mathbb{N} nach \mathbb{N} einführen, so daß

$$F_1 = \bigoplus S(-i)^{B_1(i)} \quad F_2 = \bigoplus S(-i-1)^{B_2(i)} \quad F_3 = \bigoplus S(-i-2)^{B_3(i)}$$

ist. Ist nun die Auflösung von I_C kürzer, so nennt man C arithmetisch Cohen-Macaulay (kurz ACM) und B_3 ist die Nullfunktion.

Wenn man Funktionen auf \mathbb{N} betrachtet, so kann man das natürliche Maß auf \mathbb{N} einführen und zu jeder Funktion

$$B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto B(n)$$

die Stammfunktion

$$\int B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \sum_{i=1}^n B(i)$$

betrachten. Dies ermöglicht es uns, einige Sachverhalte kürzer aufzuschreiben. Wenn wir die Stammfunktion an einer bestimmten Stelle i ausgewertet haben wollen, schreiben wir statt $\int B(i)$ kürzer $\int_i B$.

Da alle F_i endlich erzeugt sind, haben B_1, B_2 und B_3 endlichen Träger. Sei r die größte Zahl, so daß $B_1(r), B_2(r)$ oder $B_3(r)$ ungleich Null ist. Damit definieren wir als das Syzygientableau von I_C das folgende $4 \times r$ -Tableau:

$$\begin{bmatrix} 1 & B_1(1) & B_2(1) & B_3(1) \\ - & B_1(2) & B_2(2) & B_3(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & B_1(r) & B_2(r) & B_3(r) \end{bmatrix}$$

oder kürzer

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ - & & & & \\ \vdots & B1 & B2 & B3 & \\ - & & & & \end{bmatrix}$$

Üblicherweise gibt es noch eine andere Notation, nämlich führt man β_{ij} so ein, daß $F_i = \bigoplus S(-j)^{\beta_{ij}}$ ist. Das Syzygientableau hat dann die Form $[\beta_{i(j+i)}]$. Es gilt $\beta_{ij} = Bi(j - i)$. Wir bevorzugen die Schreibweise mit den Funktionen, weil man da wie oben erläutert Integrale betrachten kann.

Als abschließende Vereinbarung bezeichnen, wenn immer von Garben die Rede ist, Scriptbuchstaben die Vergarungen der S-Moduln mit gleichem lateinischem Namen. (also $\tilde{F}_i = \mathcal{F}_i$)

Weitere Notationen, die nur in einem Abschnitt benötigt wird, definieren wir dann dort.

Kapitel I

Restriktion

§1 Das generische Initialideal

Sei $S = K[a, b, c, d]$ der Polynomring in vier Variablen. Wir führen auf den Monomen eine totale Ordnung ein, die mit der Multiplikation verträglich ist:

1.1 Definition (rückwärtslexikographische Monomordnung)

Ordne zunächst die Buchstaben alphabetisch $a >_{rlex} b >_{rlex} c >_{rlex} d$. Seien dann m und n zwei Monome gleiche Grades. Bezeichne mit $min(m)$ den kleinsten Buchstaben eines Monoms und mit $Rest(m)$ den Rest. Dann definieren wir rekursiv:

$$m <_{rlex} n \Leftrightarrow \begin{cases} min(m) <_{rlex} min(n) \\ \text{oder} \\ min(m) = min(n) \text{ und } Rest(m) <_{rlex} Rest(n) \end{cases}$$

Für Monome unterschiedlichen Grades setzen wir

$$m <_{rlex} n \Leftrightarrow grad(m) < grad(n).$$

1.2 Beispiel Es ist $a^2 > ab > b^2 > ac > bc > c^2 > ad > bd > cd > d^2$. Die rückwärtslexikographische Monomordnung ist eine totale Ordnung und sie ist verträglich mit der Multiplikation, d.h. für Monome m_1, m_2 und n gilt

$$m_1 <_{rlex} m_2 \Leftrightarrow m_1 n <_{rlex} m_2 n$$

Es gibt noch eine Menge weiterer Monomordnungen, aber für unsere Zwecke ist dies die Wichtigste. Wir schreiben daher ab sofort nun noch $<$ statt $<_{rlex}$.

Mit einer solchen Monomordnung können wir nun in jedem Polynom $f \in K[a, b, c, d]$ ein besonderes Monom auszeichnen:

1.3 Definition (Initialterm und Initialideal) Sei $f = k_1 m_1 + \dots + k_n m_n$ ein Polynom mit Koeffizienten k_i und Monomen m_i für die $m_1 > m_2 > \dots > m_n$ gilt. Dann nennen wir

$$In(f) = k_1 m_1$$

Den Initialterm von f . Für ein Ideal $I \subset K[a, b, c, d]$ definieren wir mit

$$In(I) = \langle \{In(f) \mid f \in I\} \rangle$$

das zugehörige Initialideal. Es ist ein monomiales Ideal.

1.4 Beispiel Sei $I = (a^2 + b^2, ab)$. Dann ist $In(a^2 + b^2) = a^2$ und $In(ab) = ab$. Man beachte aber, daß $In(I)$ nicht etwa gleich (a^2, ab) ist. Es ist nämlich

z.B. $b^3 = b \cdot (a^2 + b^2) - a \cdot (ab) \in I$, also $In(b^3) = (b^3) \in In(I)$. Mit dem Gröbnerbasenalgorithmus berechnet man: $In(I) = (a^2, ab, b^3)$.

Für unsere Zwecke ist das Initialideal wegen des folgenden Satzes interessant:

1.5 Satz (Cancellation Principle) *Die Syzygienzahlen von I erhält man aus denen von $In(I)$ durch kürzen von benachbarten Termen gleichen Grades.*

Beweis [Gr, p.6] \square

1.6 Beispiel Sei $I = (a^2 + b^2, ab, b^2c)$. Dann ist $In(I) = (a^2, ab, b^3, b^2c)$ und das Syzygientableau von I :

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 2 & - & - \\ - & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

entsteht aus dem Syzygientableau von $In(I)$

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 2 & 1 & - \\ - & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

durch kürzen. Man beachte, daß die Terme gleichen Grades im Syzygientableau versetzt angeordnet sind. Man kürzt also "schräg".

1.7 Bemerkung Es ist nicht gesagt, daß alle Terme die man kürzen könnte, beim Übergang auch wirklich gekürzt werden. Es gibt z.B. glatte irreduzible Kurven vom Grad 6 und Geschlecht 2 mit Syzygientableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 3 & 1 & - \\ - & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

und Initialtableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 3 & 2 & - \\ - & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Die Syzygienzahlen eines Ideals ändern sich bei Koordinatenwechsel nicht. Wir wollen nun untersuchen, was dabei mit dem Initialideal passiert.

1.8 Satz (Generisches Initial Ideal) *Sei $I \in K[a, b, c, d]$ ein Ideal. Dann gibt es eine Zariski-offene Menge $U \subset PGL_3$ so daß*

$$In(\varphi(I)) = In(\varphi'(I)) \text{ für alle } \varphi, \varphi' \in U$$

ist. Dieses Initialideal nennt man das generische Initialideal (Im Zeichen $\text{Gin}(I)$).

Beweis [Ei] Theorem 15.16 \square

1.9 Bemerkung Es kommt durchaus vor, daß $U \neq PGL_3$ ist. Betrachte z.B. $I = (a^2, b^2)$ und $\varphi \in PGL_3$ mit $\varphi(a) = a + b$ und $\varphi(b) = a - b$. Dann ist $\varphi(I) = (a^2 + b^2, ab)$ und

$$(a^2, b^2) = \text{In}(I) \neq \text{In}(\varphi(I)) = (a^2, ab, b^3).$$

Das generische Initialideal hat nun eine günstige kombinatorische Eigenschaft:

1.10 Definition (Borel-fixiert) Seien m und n zwei Monome gleichen Grades. Dann definieren wir eine partielle Monomordnung $>_B$ (sprich: Borelgrößer) durch

$$a >_B b >_B c >_B d >_B$$

und

$$m >_B n \Leftrightarrow \min(m) >_B \min(n) \text{ und } \text{rest}(m) >_B \text{rest}(n)$$

Mit anderen Worten: m ist borelgrößer als n , wenn es Buchstabenweise größer ist.

Für jedes Monom m definieren wir weiter die Menge

$$B_{>}(m) = \{m' \in S \mid m' \text{ mboxistmonom und } m' >_B m\}$$

und dann für ein Ideal

$$B_{>}(I) = \bigcup_{m \in I} B_{>}(m).$$

Ein monomiales Ideal heißt dann Borel-fixiert, wenn

$$B_{>}(I) \subset (I)$$

gilt.

1.11 Beispiel

1) Es ist z.B. $B_{>}(abc) = \{aaa, aab, abb, aac\}$

2) Um zu testen, ob ein Ideal Borel-fixiert ist, muß man nur $B_{>}(m) \subset I$ für die minimalen Erzeuger von I testen (da $<_B$ mit der Multiplikation verträglich ist). Es ist daher z.B. (a^2, ab, b^3) Borel-fixiert, denn

$$\begin{aligned} B_{>}(a^2) &= \{\} \subset I \\ B_{>}(ab) &= \{a^2\} \subset I \\ B_{>}(b^3) &= \{a^3, a^2b, ab^2\} \subset I \end{aligned}$$

Andererseits ist $I = (a^2, b^2)$ nicht Borel-fixiert, denn

$$B_{>}(b^2) = \{a^2, ab\} \not\subset I.$$

Es gilt nun:

1.12 Satz Sei I ein Ideal, dann ist $Gin(I)$ Borel-fixiert.

Beweis [Ei] Theorem 15.18 \square

Dies ist insofern praktisch, als sich die minimale freie Auflösung eines solchen Ideals geschlossen angeben läßt:

1.13 Definition Sei $x \in \{a, b, c, d\}$ ein Buchstabe und $I = \{m_1, \dots, m_2\}$ monomial und Borel-fixiert. Dann definieren wir für jeden Buchstaben die Funktion

$$g_x(i) = \#\{m_j \mid \text{grad}(m_j) = i \text{ und } \min(m_j) = x\}$$

Damit haben wir dann

1.14 Satz Ist I monomial und Borel-fixiert, dann gilt für die Syzygienzahlen

$$\begin{aligned} B_1 &= g_a + 1 \cdot g_b + 1 \cdot g_c + 1 \cdot g_d \\ B_2 &= 1 \cdot g_b + 2 \cdot g_c + 3 \cdot g_d \\ B_3 &= 1 \cdot g_c + 3 \cdot g_d \\ B_3 &= 1 \cdot g_d \end{aligned}$$

Beweis Korollar bei [Gr] auf Seite 6 in unserem Spezialfall. \square

1.15 Beispiel $I = (a^2, ab, b^3, b^2c)$ ist Borel-fixiert. Betrachte folgende Tabelle:

Grad	Monom	min(m)	Beitrag zu den Syzygienzahlen
1			
2	a^2	a	- 1 - -
	ab	b	- 1 1 -
3	b^3	b	- 1 1 -
	b^2c	c	- 1 2 1

Nach dem Satz hat I also, wie oben schonmal erwähnt das Syzygientableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 2 & 1 & - \\ - & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vereinfachend kommt noch hinzu:

1.16 Satz *Ist I das Ideal einer irreduziblen Kurve, dann gilt für alle minimalen Erzeuger $m \in \text{Gin}(I)$, $m \in (a, b, c)$.*

Beweis Wir betrachten das Ideal in generischen Koordinaten und können daher annehmen, daß $\text{Gin}(I) = \text{In}(I)$ ist. Gäbe es nun einen minimalen Erzeuger $m \in \text{In}(I)$ der ein d enthält, so wäre $\text{min}(m) = d$, da d ja der kleinste Buchstabe überhaupt ist. m ist nun der Initialterm von irgendeinem Polynom $f \in I$. Da alle Monome von f rückwärtslexikographisch kleiner als m sein müssen, haben sie alle auch $\text{min}(m) = d$. Das ganze Polynom ist also durch d teilbar: $f = d \cdot \text{Rest}(f)$.

Da $V(I)$ als irreduzibel vorausgesetzt wurde, ist I ein Primideal. Es muß also entweder $d \in I$ oder $\text{Rest}(f) \in I$ gelten. In beiden Fällen hätte man dann aber ein Polynom mit einem Initialterm der m teilt. Das kann aber nicht sein, da m ein minimaler Erzeuger von $\text{In}(I)$ ist. \square

§2 Cooks Liste von generischen Initialidealen

In ihrer Doktorarbeit untersucht Michele Cook die generischen Initialideale von irreduziblen, glatten Kurven. Sie gibt dort Eigenschaften an, die solche Initialideale notwendigerweise erfüllen müssen und fügt schließlich eine Liste der Ideale an, die sie nicht ausschließen konnte. Alle wirklichen generischen Initialideale müssen in dieser Liste enthalten sein.

Dazu führt man zunächst Invarianten

$$f(i, j) = \min\{k \mid a^i b^j c^k \in \text{Gin}(I)\} \subset [0, \infty]$$

ein. Man beachte, daß $f(i, j)$ das generische Initialideal eindeutig festlegt. Es gilt

$$a^i b^j c^k \in \text{Gin}(I) \Leftrightarrow k \geq f(i, j),$$

da $\text{Gin}(I)$ Borel-fixiert ist. Um sich f zu veranschaulichen ordnet man die $f(i, j)$ in einem Diagramm an

2.1 Beispiel

$$I = (a^3, ab^2, a^2b, b^4, b^3c)$$

Konventionshalber schreiben wir statt null ein \times und statt ∞ ein \circ

Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} s_k &= \min\{i \mid f(i, 0) \leq k\} \\ \mu_i(k) &= \min\{j \mid f(i, j) \leq k\} \text{ für } 0 \leq i \leq s_k - 1. \end{aligned}$$

Da $\text{Gin}(I)$ Borel-fixiert ist, wissen wir

$$\mu_0(k) > \mu_1(k) > \dots > \mu_{s_k-1}(k) > 0.$$

Für große k wird $\mu_i(k)$ konstant und wir definieren

$$\lambda_i := \mu_i \text{ für } k \gg 0$$

Cook zeigt nun:

2.2 Theorem (Connectedness Theorem) Sei $C \subset \mathbb{P}^3$ eine reduzierte, irreduzible, nicht degenerierte Kurve. Dann gilt

$$2 \geq \mu_i(k) - \mu_{i-1}(k) \geq 1 \text{ für } 0 \leq i \leq s_k - 1$$

und

$$\mu_{s_k-1}(k) \leq 2 \text{ falls } s_k < s_0.$$

Beweis [Co] Theorem 2.1 \square

Wir wissen weiterhin:

2.3 Satz Sei I_C das Ideal einer irreduziblen, reduzierten Kurve in \mathbb{P}^3 . Dann gilt

$$d_C = \#\{(i, j) \mid f(i, j) = \infty\}$$

und

$$g_C = 1 + \sum_{i=0}^{s-1} ((i-1)\lambda_i + \binom{\lambda_i}{2}) - \sum_{f(i,j) < \infty} f(i, j)$$

Beweis [Gr] Seite 30. \square

2.4 Beispiel Alle irreduziblen, reduzierten Kurven mit dem generischen Initialideal aus Beispiel 2.1 haben Grad 6 und Geschlecht 2.

Weitere Einschränkungen erhalten wir aus folgender Betrachtung:

2.5 Definition Sei $m = a^i b^j c^k$ ein Monom mit $k < f(i, j)$. Dann nennen wir m eine sporadische Null vom Grad $i + j + k$.

Damit zeigt Cook

2.6 Theorem (generalized Stranos Lemma) Sei C eine reduzierte, irreduzible Kurve und $a^i b^j c^{k-a}$ eine sporadische Null, so daß $a^i b^j c^k$ ein minimaler Erzeuger von $Gin(I_C)$ ist. Sind nun H und H' generische Hyperflächen, dann hat $J = (I_C|_H : (H \cap H')^a)$ eine Syzygie im Grad kleinergleich $m + 2$.

Beweis [Co] Theorem 3.3 \square

Schließlich haben wir noch

2.7 Theorem (Gruson, Lazarsfeld, Peskine) Sei C eine irreduzible, nicht entartete Kurve vom Grad d im IP^n . Dann ist C $(d+1-n)$ -regulär. Ist $d > n+1$ und ist C $(d+1-n)$ -irregulär, dann ist C eine glatte rationale Kurve mit einer $(d+2-n)$ -Sekante.

Beweis [GLP] \square

Da die Regularität gerade der Grad des größten Erzeugers von $Gin(I_C)$ ist (siehe [BS]) haben wir in unserem Fall:

$Gin(I_C)$ wird im Grad $\leq d - 1$ erzeugt und falls $d_C > 4$ und $g_C > 0$ ist, wird $Gin(I_C)$ sogar im Grad $\leq d - 2$ erzeugt.

Mit diesen Sätzen schließt Cook möglichst viele generische Initialideale aus, so daß für $d_C \leq 8$ nur noch folgende übrig bleiben:

2.8 Statistik Überblick über alle generischen Initialideale aus Cooks Liste nach Grad (waagrecht) und Geschlecht (senkrecht):

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	3
6:	0	0	0	0	0	0	1	3
5:	0	0	0	0	0	0	2	5
4:	0	0	0	0	0	1	2	5
3:	0	0	0	0	0	2	3	7
2:	0	0	0	0	1	1	4	9
1:	0	0	0	1	1	1	4	12
0:	1	1	1	1	3	3	10	26

	1	2	3	4	5	6	7	8

§3 Kürzen

Um nun einen Überblick über mögliche Syzygientableaus vom Grad kleinergleich 8 zu bekommen, berechnen wir mit Satz 1.14 die Syzygienzahlen der generischen Initialideale aus Cooks Liste. Dabei kommen manche Tableaus doppelt vor. Eliminiert man diese, so bleiben folgende Tableaus übrig:

3.1 Statistik *Syzygientableaus von generischen Initialidealen nach Grad und Geschlecht*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	3
6:	0	0	0	0	0	0	1	3
5:	0	0	0	0	0	0	2	5
4:	0	0	0	0	0	1	2	5
3:	0	0	0	0	0	2	3	6
2:	0	0	0	0	1	1	4	7
1:	0	0	0	1	1	1	4	8
0:	1	1	1	1	3	3	9	18

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Nach Satz 1.5 entstehen die Syzygientableaus der Kurven aus denen der Initialideale durch Schrägkürzen. Wenn man jedes Tableau auf alle möglichen Arten kürzt und doppelte eliminiert, so bekommt man eine Menge möglicher Syzygientableaus, die aber immerhin alle wirklich vorkommenden enthält. Mit einem Pascalprogramm (siehe Anhang) berechnen wir:

3.2 Statistik *Syzygientableaus die aus denen von generischen Initialidealen durch Kürzen entstehen:*

9:	0	0	0	0	0	0	0	2
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	8
6:	0	0	0	0	0	0	1	7
5:	0	0	0	0	0	0	4	16
4:	0	0	0	0	0	2	3	18
3:	0	0	0	0	0	2	13	30
2:	0	0	0	0	1	3	14	51
1:	0	0	0	2	1	2	20	92
0:	1	1	1	1	7	10	54	248
	1	2	3	4	5	6	7	8

Im Rest dieses Kapitels versuchen wir diese Menge noch weiter einzuschränken, ohne die Bettitableaus von irreduziblen, glatten Kurven zu verlieren.

§4 Reduzible Kurven

Betrachte das Bettitableau

$$\begin{array}{cccc} ;;; & 1 & - & - & - \\ ;;; & - & - & - & - \\ ;;; & - & 2 & 1 & - \\ ;;; & - & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

Angenommen, es gehört zu der minimalen Auflösung eines Ideals I . Zwischen den beiden Erzeugern vom Grad 3, nennen wir sie f und g gibt es dann eine minimale lineare Relation

$$l_f f + f_g g = 0$$

Andere Erzeuger können wegen der Minimalität nicht beteiligt sein. ($\deg(l_f f) = 4$, also könnten Erzeuger vom Grad 4 nur mit konstanten Koeffizienten vorkommen.)

l_f und l_g sind nun teilerfremd (sonst wäre die Relation wieder nicht minimal) und l_f muß ein Teiler von g sein. Damit ist aber g nicht irreduzibel und die Kurve kann es auch nicht sein. Das Bettitableau von oben kann also nicht zu einer irreduziblen Kurve gehören.

Auf der anderen Seite gibt es aber sehr wohl irreduzible Kurven ($d=7, g=4$) zu dem gekürzten Bettitableau

$$\begin{array}{cccc} ;;; & 1 & - & - & - \\ ;;; & - & - & - & - \\ ;;; & - & 2 & - & - \\ ;;; & - & 2 & 4 & 1 \end{array} .$$

Man kann also in diesem Fall das generische Initialideal nicht ausschließen, obwohl es einige von den gekürzten Bettitableaus nicht gibt.

Allgemeiner haben wir:

4.1 Satz Sei I das Ideal einer irreduziblen Kurve, $i \in \mathbb{N}$ und f und g die einzigen minimalen Erzeuger mit

$$\deg(f) \leq i, \quad \deg(g) \leq i \quad \text{und} \quad i \leq \deg(f) + \deg(g) - 1$$

Dann gibt es keine Syzygien im Grad $\leq i$.

Beweis Betrachte eine Syzygie mit minimalem Grad. Hat sie Grad $\leq i$, so kann sie nur f und g beinhalten, da dies die einzigen Erzeuger sind, deren Grad klein

genug ist. Wir haben also

$$sf + tg = 0$$

mit $\deg(sf) = \deg(tg) \leq i$. s und t sind teilerfremd, denn sonst könnte man durch kürzen eine Syzygie von noch kleinerem Grad erhalten. Damit muß s ein Teiler von g sein und es gilt

$$\begin{aligned} \deg(s) &= \deg(s) + \deg(f) - \deg(f) \\ &= \deg(sf) - \deg(f) \\ &\leq i - \deg(f) \\ &\leq \deg(f) + \deg(g) - 1 - \deg(f) \\ &= \deg(g) - 1 \end{aligned}$$

Also ist s ein echter Teiler von g , denn $\deg(s) = 0$ ist auch unmöglich, weil die Erzeuger minimal sein sollten.

Nun ist aber I irreduzibel, d.h. die minimalen Erzeuger können keine Teiler haben. Ein Widerspruch.

Es kann also keine Syzygien mit Grad $\leq i$ geben. \square

4.2 Korollar Sei I das Ideal einer irreduziblen Kurve und $B1^*(i) := B1(i) \cdot i$. Ist damit $\int_i B1 = 2$ und $\int_i B1^* \geq i + 2$, so gilt $\int_i B2 = 0$.

Beweis Es gibt wegen $\int_i B1 = 2$ genau zwei Erzeuger vom Grad $\leq i$, sagen wir f und g . Für sie gilt

$$\deg(f) + \deg(g) = \int_i B1^* \geq i + 2$$

also

$$\deg(f) + \deg(g) - 1 \geq i + 1$$

Wir sind damit in der Situation von oben, d.h. es gibt keine Syzygien vom Grad $\leq i + 1$, bzw. $\int_i B2 = 0$ \square

Dadurch können wir einige Bettitableaus ausschließen:

4.3 Statistik *Syzygientableaus deren Kurven reduzibel sein müssen:*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	1
6:	0	0	0	0	0	0	0	4
5:	0	0	0	0	0	0	1	6
4:	0	0	0	0	0	1	1	0
3:	0	0	0	0	0	0	6	1
2:	0	0	0	0	0	0	3	6
1:	0	0	0	1	0	1	0	6
0:	0	0	0	0	0	4	6	25

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Übrig bleiben dann folgende Tabelauss:

4.4 Statistik *weiterhin mögliche Syzygientableaus:*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	7
6:	0	0	0	0	0	0	1	3
5:	0	0	0	0	0	0	3	10
4:	0	0	0	0	0	1	2	18
3:	0	0	0	0	0	2	7	29
2:	0	0	0	0	1	3	11	45
1:	0	0	0	1	1	1	20	86
0:	1	1	1	1	7	6	48	223

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

§5 Eingebettete Punkte

Wir wollen nun ausnutzen, daß irreduzible Kurven keine eingebetteten Punkte haben. Dazu verwenden wir

5.1 Satz Sei I ein Ideal und

$$S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \longleftarrow \dots \xleftarrow{\varphi_n} F_n \longleftarrow 0$$

eine endliche freie Auflösung, sowie $I(\varphi_i)$ das Ideal der $\text{rank}(\varphi_i) \times \text{rank}(\varphi_i)$ Minoren von φ_i . Sei weiterhin p ein Primideal mit $d = \text{depth}(p_p)$. Dann gilt:

$$p \in \text{Ass}(S/I) \Leftrightarrow I(\varphi_d) \subset p.$$

Beweis [Ei] Corrolary 20.14 \square

In unserem Fall bedeutet das:

5.2 Korrolar Sei

$$S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0$$

eine freie Auflösung einer irreduziblen Kurve. Dann ist $\text{depth}(I(\varphi_3)) = 4$.

Beweis Da der Komplex exakt ist, ist $\text{depth}(I(\varphi_3)) \geq 3$.

Wäre $\text{depth}(I(\varphi_3)) = 3$ so gäbe es ein Primideal $p \supset I(\varphi_3)$ mit $\text{depth}(p) = \text{codim}(p) = 3$, welches nach Satz 5.1 dann zu S/I assoziiert ist. Damit beschreibt aber p eine $\text{codim} = 3$ Komponente von $V(I)$, die es nach Voraussetzung nicht gibt. \square

Für Ideale, die von den Minoren einer Matrix erzeugt werden, gibt es nun eine Abschätzung der Kodimension:

5.3 Satz (Macaulay) Ist φ eine $r \times n$ Matrix und $I_r(\varphi)$ das Ideal der $r \times r$ Minoren, so gilt

$$\text{codim}(I_r(\varphi)) \leq n - r + 1$$

Beweis [Ei] Exercise 10.10 \square

Wir interessieren uns nun für die Matrizen zwischen freien graduierten Moduln, die noch etwas Zusatzstruktur haben. Um diese beschreiben zu können, führen wir erstmal noch etwas Notation ein:

Sei

$$\varphi_3 : \bigoplus S(-i-2)^{B3(i)} \rightarrow \bigoplus S(-i-1)^{B2(i)}$$

eine Abbildung zwischen freien Moduln. Dann bezeichnen wir mit

$$[i \mapsto j]^{\varphi_3} : S(-i-2)^{B_3(i)} \rightarrow S(-j-1)^{B_2(j)}$$

die auf den graduierten Teilen induzierten Abbildungen. Wenn wir diese als Matrizen auffassen, so haben wir:

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} [1 \mapsto 1] & [1 \mapsto 2] & [1 \mapsto 3] & \cdots \\ [2 \mapsto 1] & [2 \mapsto 2] & \cdots & \\ [3 \mapsto 1] & \cdots & & \\ \cdots & & & \end{bmatrix}$$

Wegen der Graduierung sind alle Einträge von $[i \mapsto j]$ vom Grad $j - i + 1$. Insbesondere also $[i \mapsto j] = 0$ falls $i > j + 1$. Wenn φ_3 minimal ist, so gibt es keine Einträge vom Grad null. Dann ist zusätzlich noch $[i \mapsto i + 1] = 0$.

Mit

$$\begin{aligned} [i \mapsto \leq d] &= \left[[i \mapsto 1][i \mapsto 2] \cdots [i \mapsto d] \right] \quad \text{und} \\ [i \mapsto all] &= \left[[i \mapsto 1][i \mapsto 2] \cdots \right] \end{aligned}$$

führen wir weitere Kurzschreibweisen ein. Beachte daß $[i \mapsto j]$ eine $B_3(i) \times B_2(j)$ Matrix und $[i \mapsto \leq d]$ eine $B_3(i) \times \int_d B_2$ Matrix ist.

Damit beweisen wir nun

5.4 Satz Sei

$$S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0$$

die minimale freie Auflösung einer irreduziblen Kurve und

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ - & & & \\ \vdots & B_1 & B_2 & B_3 \\ - & & & \end{bmatrix}$$

das Bettitableau, dann gilt

$$\int B_3 \leq \max(\int B_2 - 3, 0).$$

Beweis Betrachte φ_3 . Mit $r = \text{rank}(F_3)$ und $n = \text{rank}(F_2)$ ist φ_3 eine $n \times r$ Matrix. Da γ injektiv ist, haben wir sogar $\text{rank}(\varphi_3) = r$ und $I(\gamma)$ wird von den $r \times r$ Minoren erzeugt. Es ist nun für beliebiges d

$$\varphi_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} [\leq d \mapsto \text{all}] \\ [> d \mapsto \text{all}] \end{bmatrix}}_n \begin{matrix} \} r_1 \\ \} r_2 \end{matrix}$$

Entwickeln wir dann alle $r \times r$ Minoren nach den ersten r_1 Zeilen gleichzeitig, so sehen wir

$$I_r(\varphi_3) \subset I_{r_1}([\leq d \mapsto \text{all}])I_{r_2}([> d \mapsto \text{all}])$$

und es gilt insbesondere

$$4 = \text{codim}(I_r(\varphi_3)) \leq \text{codim}(I_{r_1}([\leq d \mapsto \text{all}])).$$

Es ist nun φ_3 minimal und wir haben daher

$$\begin{aligned} I_{r_1}([\leq d \mapsto \text{all}]) &= I_{r_1}([\leq d \mapsto \leq d][\leq d \mapsto > d]) \\ &= I_{r_1}([\leq d \mapsto \leq d] \quad 0) \\ &= I_{r_1}([\leq d \mapsto \leq d]). \end{aligned}$$

Nun ist $[\leq d \mapsto \leq d]$ eine $r_1 = \int_d B_3 \times \int_d B_2$ Matrix und mit Macaulays Abschätzung gilt (wenn $r_1 > 0$)

$$4 \leq \text{codim} I_{r_1}([\leq d \mapsto \leq d]) \leq \int_d B_2 - \int_d B_3 + 1.$$

Das heißt $\int_d B_3 \leq \int_d B_2 - 3$, und da d beliebig war sogar

$$\int B_3 \leq \max(\int B_2 - 3, 0)$$

wie gewünscht. \square

5.5 Statistik *Syzygientableaus, deren Kurven eingebettete Punkte haben müssen:*

9:	0	0	0	0	0	0	0	0
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	4
6:	0	0	0	0	0	0	0	1
5:	0	0	0	0	0	0	1	4
4:	0	0	0	0	0	0	0	4
3:	0	0	0	0	0	0	4	9
2:	0	0	0	0	0	1	1	8
1:	0	0	0	0	0	0	3	31
0:	0	0	0	0	2	1	15	83

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

5.6 Statistik *weiterhin mögliche Syzygientableaus:*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	3
6:	0	0	0	0	0	0	1	2
5:	0	0	0	0	0	0	2	6
4:	0	0	0	0	0	1	2	14
3:	0	0	0	0	0	2	3	20
2:	0	0	0	0	1	2	10	37
1:	0	0	0	1	1	1	17	55
0:	1	1	1	1	5	5	33	140

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Im nächsten Kapitel werden wir nun versuchen, zu möglichst vielen dieser Tableaus irreduzible, glatte Kurven zu konstruieren.

Kapitel II

Konstruktion

§1 ACM Kurven

Die einfachsten Kurven sind diejenigen, deren Auflösung kürzer ist als normal, d.h. die in der letzten Spalte des Syzygientableaus keine Einträge haben. Zu ihnen gehören z.B. alle ebenen Kurven, alle vollständigen Durchschnitte, aber auch die twisted Kubic und andere. Diese Kurven heißen arithmetisch Cohen-Macaulay, weil ihre Koordinatenringe Cohen-Macaulay sind.

Wir wollen nun zunächst solche Kurven konstruieren. Dazu benutzen wir:

1.1 Theorem (Hilbert-Burch) *Wenn ein Komplex*

$$S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} F_2 \longleftarrow 0$$

exakt und $\text{rank}(F_1) = n$ ist, so ist $\text{rank}(F_2) = n - 1$ und es gibt einen Nichtnullteiler a , so daß $I = aI_{n-1}(\varphi_2)$ ist. Das Ideal $I_{n-1}(\varphi_2)$ hat dann $\text{depth} = 2$.

Umgekehrt bekommt man für jede $n \times (n - 1)$ -Matrix φ_2 mit $\text{depth} \geq 2$ und jeden Nichtnullteiler a ein Ideal $I = aI_{n-1}$, das eine Auflösung in der obigen Form mit diesem φ_2 hat.

Beweis [Ei] Theorem 20.15 \square

Wir können also einfach eine Matrix φ_2 mit den richtigen Bettizahlen wählen (z.B. zufällig), und das zugehörige Ideal I ausrechnen. Wenn wir φ_2 auch noch ohne konstante Einträge wählen, so ist die Auflösung automatisch minimal und wir haben eine Kurve mit dem gewünschten Syzygientableau konstruiert.

Wir bekommen damit für alle Syzygientableaus aus Kapitel I, die keine Einträge in der letzten Spalte haben, eine Kurve:

1.2 Statistik *ACM-Kurven mit den richtigen Syzygientableaus*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	1
6:	0	0	0	0	0	0	1	0
5:	0	0	0	0	0	0	2	0
4:	0	0	0	0	0	1	0	0
3:	0	0	0	0	0	1	0	0
2:	0	0	0	0	1	0	0	0
1:	0	0	0	1	0	0	0	0
0:	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

Diese sind sogar, bis auf eine, alle glatt:

1.3 Statistik *Glatte, irreduzible ACM-Kurven mit den richtigen Syzygientableaus*

9:	0	0	0	0	0	0	0	1
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	1
6:	0	0	0	0	0	0	1	0
5:	0	0	0	0	0	0	1	0
4:	0	0	0	0	0	1	0	0
3:	0	0	0	0	0	1	0	0
2:	0	0	0	0	1	0	0	0
1:	0	0	0	1	0	0	0	0
0:	1	1	1	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Im weiteren werden wir nun diese Methode auf Syzygientableaus mit Einträgen in der letzten Spalte erweitern.

§2 Das Konstruktionsverfahren

Zunächst etwas Notation. Sei I das Ideal einer irreduziblen, glatten Kurve im \mathbb{P}^3 und

$$F_\bullet : S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0$$

die minimale freie Auflösung, wobei

$$F_1 = \bigoplus S(-i)^{B1(i)} \quad F_2 = \bigoplus S(-i-1)^{B2(i)} \quad F_3 = \bigoplus S(-i-2)^{B3(i)}$$

sein sollen. Dualisieren ergibt einen Komplex

$$F_\bullet^\vee : F_3^\vee \xleftarrow{\varphi_3^\vee} F_2^\vee \xleftarrow{\varphi_2^\vee} F_1^\vee \xleftarrow{\varphi_1^\vee} S^\vee \longleftarrow 0$$

mit

$$F_1^\vee = \bigoplus S(-4+i)^{B1(i)} \quad F_2^\vee = \bigoplus S(-3+i)^{B2(i)} \quad F_3^\vee = \bigoplus S(-2+i)^{B3(i)}.$$

Betrachtet man $M = \text{coker } \varphi_3^\vee$ so hat M endliche Länge (Korollar 5.2) und es existiert eine freie Auflösung

$$L_\bullet : M \longleftarrow F_3^\vee \xleftarrow{\varphi_3^\vee} F_2^\vee \xleftarrow{\sigma_2} L_2 \xleftarrow{\sigma_3} L_3 \xleftarrow{\sigma_4} L_4 \longleftarrow 0$$

die exakt, aber bei φ_3^\vee und σ_2 nicht notwendig minimal ist.

Setze $L_2 = \bigoplus S(-4+i)^{l_2(i)}$. Da F_\bullet^\vee ein Komplex ist, faktorisiert φ_2^\vee über L_2 :

$$\begin{array}{ccccccccccc} M & \longleftarrow & F_3^\vee & \longleftarrow & F_2^\vee & \xleftarrow{\sigma_2} & L_2 & \longleftarrow & L_3 & \longleftarrow & L_4 & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow & & & & & & \\ & & F_3^\vee & \longleftarrow & F_2^\vee & \xleftarrow{\varphi_2^\vee} & F_1^\vee & \longleftarrow & 0 & & & & \end{array}$$

2.1 Satz *Es gibt eine Zariski-offene Menge $U \subset \text{Hom}(F_1^\vee, L_2)$, so daß es für alle $\psi \in U$ eine irreduzible, glatte Kurve $V(I_\psi)$ gibt, die die minimale Auflösung*

$$S/I_\psi \longleftarrow S \longleftarrow F_1 \xleftarrow{(\sigma_2 \circ \psi)^\vee} F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0$$

hat.

Beweis Betrachte $K = \ker \varphi_1$. K ist immerhin noch lokalfrei. φ_2 faktorisiert über K und

$$S/I \longleftarrow S \xleftarrow{\varphi_1} F_1 \xleftarrow{\varphi_2} K \longleftarrow 0$$

ist exakt. Nach Hilbert-Burch für lokalfreie Garben ist also $(\text{depth}(I(\bar{\varphi}_2))) \geq 2$. Da dies eine offene Eigenschaft ist, gibt es eine ganze offenen Menge $U_1 \subset \text{Hom}(K, F_1)$ so daß für alle $\varphi \in U_1$ auch $\text{depth}(I(\varphi)) \geq 2$ ist. Umgekehrt erhalten wir mit Hilbert-Burch dann für alle $\varphi \in U_1$ eine Sequenz

$$S/I_\varphi \longleftarrow S \longleftarrow F_1 \xleftarrow{\varphi} K \longleftarrow 0,$$

wobei I_φ das Ideal einer Kurve ist. Da nun $I = I_{\bar{\varphi}_2}$ das Ideal einer irreduziblen, glatten Kurve war und auch dies offene Eigenschaften sind, gibt es eine offene Menge $U_2 \in U_1$ so daß $V(I_\varphi)$ für alle $\varphi \in U_2$ glatt und irreduzibel wird.

Die zweite Hälfte der Auflösung von S/I hat folgende Form:

$$0 \longleftarrow K \longleftarrow F_2 \xleftarrow{\varphi_3} F_3 \longleftarrow 0.$$

Dualisieren wir diese Sequenz so erhält man

$$F_3^\vee \xleftarrow{\varphi_3^\vee} F_2^\vee \longleftarrow K^\vee \longleftarrow 0,$$

eine immer noch exakte Sequenz, da die Garben lokalfrei waren. K^\vee ist also der Kern von φ_3^\vee . Es gibt nun Morphismen

$$\text{Hom}(F_1^\vee, L_2) \rightarrow \text{Hom}(F_1^\vee, K^\vee) \rightarrow \text{Hom}(K, F_1),$$

wobei der erste Morphismus jeder Abbildung ihre Faktorisierung über K^\vee zuordnet, und der zweite Morphismus einfach dualisiert. Das Urbild $U_2 \subset \text{Hom}(F_1^\vee, L_2)$ der offenen Menge $U_1 \subset \text{Hom}(K, F_1)$ ist dann wieder offen und die gesuchte Menge. \square

Wie bei den ACM-Kurven kann man also φ_2 generisch wählen, wenn man nur φ_3 kennt. Bei den ACM-Kurven war das kein Problem, da dort immer $\varphi_3 = 0$ war. Die erste Idee ist natürlich, auch φ_3 generisch mit Einträgen vom richtigen Grad zu wählen. Damit finden wir einige Kurven in §3, aber alle Kurven findet man so auf jeden Fall nicht (siehe §4).

Das weitere Vorgehen ist nun so, daß wir für jedes Syzygientableau aus Kapitel I ein oder mehrere $\varphi_3 \in \text{Hom}(F_2, F_3)$ auswählen und die Konstruktion mit generischem ψ versuchen. Falls es tatsächlich eine Kurve mit diesen Syzygienzahlen und diesem φ_3 gibt, haben wir wegen Satz 2.1 gute Chancen so eine Kurve zu finden.

§3 Generische Matrizen

Wählt man φ_3 generisch, so findet man mit Macaulay die folgenden glatten irreduziblen Kurven:

3.1 Statistik *gefundene Kurven mit verschiedenen Syzzgientableaus*

9:	0	0	0	0	0	0	0	0
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	1
6:	0	0	0	0	0	0	0	1
5:	0	0	0	0	0	0	0	4
4:	0	0	0	0	0	0	2	5
3:	0	0	0	0	0	1	2	2
2:	0	0	0	0	0	1	3	1
1:	0	0	0	0	1	1	3	2
0:	0	0	0	1	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8

Davon sind aber nur einige glatt und irreduzibel:

3.2 Statistik *Gefundene glatte, irreduzible Kurven mit verschiedenen Syzygientableaus*

9:	0	0	0	0	0	0	0	0
8:	0	0	0	0	0	0	0	1
7:	0	0	0	0	0	0	0	0
6:	0	0	0	0	0	0	0	1
5:	0	0	0	0	0	0	0	3
4:	0	0	0	0	0	0	2	3
3:	0	0	0	0	0	1	2	2
2:	0	0	0	0	0	1	2	1
1:	0	0	0	0	1	1	2	1
0:	0	0	0	1	2	2	2	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

Da die ganze Konstruktion offen ist, d.h. da keine Gleichung gelöst werden mußte, zeigt die Existenz eines Beispielles, daß wir mit der Konstruktion eine rationale

Parametrisierung eines offenen Stratum einer Komponente des Hilbertschemas angegeben haben.

§4 2 x n Matrizen

Um etwas speziellere Kurven zu bekommen, betrachten wir die Normalformen von $2 \times n$ Matrizen.

Diese Matrizen sind besonders interessant, da man hier manchmal für gleiche Matrixgrößen verschiedene $l_2(r)$ hat:

Matrix φ	Auflösung	Kommentar	Träger von $\text{coker } \varphi$
$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 4 & - & - & - \\ - & - & 4 & 2 & - \end{matrix}$	Generischer Fall	4 Punkte
$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & - & - \\ - & - & 2 & 1 & - \end{matrix}$	$l_2(r) = 1$	2 Punkte und eine Gerade
$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 4 & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - \end{matrix}$	$l_2(r) = 2$	2 Geraden
$\begin{matrix} 0 & a & b & c & d \\ a & b & c & d & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 5 & - & - & - \\ - & - & 10 & 10 & 3 \end{matrix}$	Generischer Fall	\emptyset
$\begin{matrix} 0 & a & b & c & d \\ a & b & c & 0 & d \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 5 & 1 & - & - \\ - & - & 7 & 7 & 2 \end{matrix}$	$l_2(r) = 1$	ein Punkt
$\begin{matrix} 0 & a & b & c & d \\ a & b & 0 & d & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 5 & 2 & - & - \\ - & - & 4 & 4 & 1 \end{matrix}$	$l_2(r) = 2$	zwei Punkte
$\begin{matrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & c & d & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & - & - \\ - & - & 1 & 1 & - \end{matrix}$	$l_2(r) = 3$	drei Punkte

Wir nutzen diese Tabelle, indem wir alle Syzygientableaus aus Kapitel I mit $B_3(r) = 2$, $B_2(r) = n$ und $B_1(r) = l_2(r)$ herausuchen und φ_3 's ausprobieren, die die Normalformen als lineare Einträge haben und sonst zufällig ("generisch") gewählt werden.

Tatsächlich finden wir so wieder einige Kurven:

4.1 Statistik *gefundene Kurven mit verschiedenen Syzygientableaus*

9:	0	0	0	0	0	0	0	0
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	0
6:	0	0	0	0	0	0	0	1
5:	0	0	0	0	0	0	0	0
4:	0	0	0	0	0	0	0	3
3:	0	0	0	0	0	0	0	4
2:	0	0	0	0	0	0	1	1
1:	0	0	0	0	0	0	3	1
0:	0	0	0	0	0	0	3	1

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Von denen aber nur einige glatt und irreduzibel sind:

4.2 Statistik *gefundene glatte, irreduzible Kurven mit verschiedenen Syzygientableaus.*

9:	0	0	0	0	0	0	0	0
8:	0	0	0	0	0	0	0	0
7:	0	0	0	0	0	0	0	0
6:	0	0	0	0	0	0	0	0
5:	0	0	0	0	0	0	0	0
4:	0	0	0	0	0	0	0	1
3:	0	0	0	0	0	0	0	2
2:	0	0	0	0	0	0	0	0
1:	0	0	0	0	0	0	1	1
0:	0	0	0	0	0	0	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8
--	---	---	---	---	---	---	---	---

Da keine generischen Matrizen verwendet wurden, sind die Syzygientableaus dieser Kurven auch von denen in §3 gefundenen verschieden.

Zusammen mit denen von §1 und §3 sind dies jetzt 49 glatte, irreduzible Kurven vom Grad kleinergleich 8, wobei jedes mögliche Geschlecht mindestens einmal vorkommt. Dies werden aber bei weiten nicht alle möglichen Kurven sein - einerseits in Anbetracht der großen Menge weiterer möglicher Syzygientableaus

aus Kapitel I - und andererseits, weil noch überhaupt keine speziellen Matrizen ausprobiert wurden.

Eine systematische Untersuchung von möglichen φ_3 für einzelne Syzygientableaus führt sicherlich noch zur Konstruktion weiterer Kurven.

Kapitel III

Geometrische Interpretation

§1 Liaison

1.1 Definition (Liaison) Sei X ein vollständiger Durchschnitt zweier Hyperflächen vom Grad s und t . Sei weiterhin $C \subset X$ eine Teilkurve. Setze $I_\Gamma = (I_X : I_C)$ und $\Gamma = V(I_\Gamma)$. Γ heißt dann die zu C per (s, t) liierte Kurve. Haben C und Γ keine gemeinsamen Komponenten, so ist X die schementheoretische Vereinigung der beiden Kurven $X = C \cup \Gamma$.

Vollständige Durchschnitte sind nun so gut bekannt, daß man einige einfache Zusammenhänge zwischen C und Γ hat:

1.2 Satz Mit den Bezeichnungen von oben gilt

$$d_C + d_\Gamma = s \cdot t$$

und

$$g_C - g_\Gamma = (s + t - 4)(d_C - d_\Gamma)/2.$$

Beweis [PS] oder [R] \square

Da vollständige Durchschnitte zusammenhängend sind, kann man die Komponenten der liierten Kurve Γ auch als Sekantenkurven von C auffassen. Ist C z.B. zu einer Gerade liiert, so ist diese Gerade eine Sekante von C . Oft haben diese Sekantenkurven eine ungewöhnlich hohe Zahl von Schnittpunkten mit der Kurve:

1.3 Korollar Sei X ein vollständiger Durchschnitt vom Typ (s, t) , der nur normale Überkreuzungen als Singularitäten hat; $C \subset X$ eine glatte Kurve und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ glatte irreduzible disjunkte Komponenten der liierten Kurve $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.

Falls $\Gamma_i \not\subset C$, dann schneidet Γ_i die Kurve C in

$$(s + t - 4)d_{\Gamma_i} - 2g_{\Gamma_i} + 2$$

Punkten.

Beweis Betrachte Γ_i und $C^+ = X \setminus \Gamma_i$. Dann sind Γ_i und C^+ liiert. Da es nur normale Überkreuzungen gibt, haben wir

$$0 \longleftarrow \mathcal{O}_{\Gamma_i \cup C^+} \longleftarrow \mathcal{O}_{\Gamma_i} \oplus \mathcal{O}_{C^+} \longleftarrow \mathcal{O}_{\Gamma_i \cap C^+} \longleftarrow 0$$

und die Anzahl der Schnittpunkte ergibt sich aus den Hilbertpolynomen:

$$\#\text{Schnittpunkte} = g_X - g_{C^+} - g_{\Gamma_i} + 1.$$

Für vollständige Durchschnitte kennen wir das Geschlecht $g_X = 1/2st(s + t - 4) + 1$ und mit dem Satz ergibt sich die Formel. Da nun nach Voraussetzung

$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ist, liegen alle Schnittpunkte auf C , also gibt die Formel tatsächlich die Anzahl der Schnittpunkte von Γ_i und C an. \square

1.4 Beispiel Ist eine Kurve per (s,t) zu einer Gerade liiert, so ist diese Gerade automatisch eine $(s+t-2)$ -Sekante der Kurve. (Falls sie überall normal schneidet)

Interessant für uns ist nun, daß es auch einen Zusammenhang zwischen den freien Auflösungen von I_C und \mathcal{O}_Γ gibt:

1.5 Theorem Sei

$$\mathcal{O}_\Gamma \longleftarrow \mathcal{C} \oplus \mathcal{O}_P \longleftarrow \mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{A} \longleftarrow 0$$

die Auflösung, die durch Vergarben der minimalen freien Auflösung von $H_*^0(\mathcal{O}_\Gamma)$ entsteht. Dann ist

$$\mathcal{I}_C \longleftarrow \mathcal{A}^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \longleftarrow \mathcal{B}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{C}^\vee(-s-t) \longleftarrow 0$$

eine (nicht notwendig minimale) Auflösung von \mathcal{I}_C . Ist die Auflösung nicht minimal, so können höchstens $\mathcal{O}(-s)$ und $\mathcal{O}(-t)$ weggekürzt werden.

Beweis Betrachte die Abbildung von \mathcal{B} nach \mathcal{C} . Sie ist surjektiv und hat einen Kern \mathcal{N} :

$$0 \longleftarrow \mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{N} \longleftarrow 0$$

Mit diesem \mathcal{N} haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \mathcal{I}_\Gamma \longleftarrow \mathcal{N} \longleftarrow \mathcal{A} \longleftarrow 0$$

([MDP] Prop II.4.1). Aus dieser erhält man eine Auflösung

$$0 \longleftarrow \mathcal{I}_C \longleftarrow \mathcal{A}^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \longleftarrow \mathcal{N}^\vee(-s-t) \longleftarrow 0$$

([MDP] Prop III.1.4). Da \mathcal{N} , \mathcal{B} und \mathcal{C} lokalfrei sind, ist auch

$$0 \longleftarrow \mathcal{N}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{B}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{C}^\vee(-s-t)$$

exakt. Also insbesondere auch

$$\mathcal{I}_C \longleftarrow \mathcal{A}^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \longleftarrow \mathcal{B}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{C}^\vee(-s-t).$$

Da alle Auflösungen als minimal angenommen wurden, kann hier höchstens noch $\mathcal{O}(-s)$ oder $\mathcal{O}(-t)$ weggekürzt werden. Da C lokal Cohen-Macaulay ist, muß die freie Auflösung Länge 4 (oder kürzer) haben. Die Abbildung von $\mathcal{C}^\vee(-s-t)$ nach $\mathcal{B}^\vee(-s-t)$ kann also keinen Kern haben, weil sonst die Auflösung zu lang werden würde. Wir haben also sogar

$$\mathcal{I}_C \longleftarrow \mathcal{A}^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \longleftarrow \mathcal{B}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{C}^\vee(-s-t) \longleftarrow 0$$

exakt. \square

1.6 Korollar Sei I_C das Ideal einer Kurve und f und g zwei minimale Erzeuger vom Grad s und t . Sei Γ die zu C per (f, g) lichte Kurve. Die minimale Auflösung von I_C hat damit folgende Gestalt:

$$I_C \longleftarrow \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \oplus \mathcal{F}_1 \longleftarrow \mathcal{F}_2 \longleftarrow \mathcal{F}_3 \longleftarrow 0$$

Und \mathcal{O}_Γ hat die minimale freie Auflösung

$$\mathcal{O}_\Gamma \longleftarrow \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{F}_3^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{F}_2^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{F}_1^\vee(-s-t) \longleftarrow 0.$$

Beweis Man betrachte die minimale Auflösung von \mathcal{O}_Γ

$$\mathcal{O}_\Gamma \longleftarrow \mathcal{C} \oplus \mathcal{O}_P \longleftarrow \mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{A} \longleftarrow 0$$

und liere per f und g wieder zurück. Dann haben wir nach dem Satz eine Auflösung

$$I_C \longleftarrow \mathcal{A}^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) \longleftarrow \mathcal{B}^\vee(-s-t) \longleftarrow \mathcal{C}^\vee(-s-t) \longleftarrow 0,$$

die zunächst nicht minimal zu sein braucht. Da aber f und g minimale Erzeuger von I_C sind, können $\mathcal{O}(-s)$ und $\mathcal{O}(-t)$ nicht gekürzt werden. Also ist die Auflösung hier doch minimal. Da die minimale Auflösung aber bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, muß $\mathcal{C} \cong \mathcal{F}_3^\vee(-s-t)$, $\mathcal{B} \cong \mathcal{F}_2^\vee(-s-t)$ und $\mathcal{A} \cong \mathcal{F}_1^\vee(-s-t)$ sein. \square

Die minimale freie Auflösung von C sagt uns also etwas über die minimale freie Auflösung von \mathcal{O}_Γ und damit über die Sekantenkurven aus.

Unterscheiden sich also zwei Kurven mit gleicher Hilbertfunktion in ihren Auflösungen und damit in ihren Syzygientableaus, so können wir den Grund dafür in der Existenz besonderer Sekantenkurven suchen.

§2 Sekantenkurven

2.1 Beispiel Im Grad 8 und Geschlecht 5 haben wir in Kapitel II drei Kurven mit verschiedenen Bettizahlen gefunden:

```

% <d8g5.c1 x i

codimension : 4
total:      1   5   5   1
-----
  0:      1   -   -   -
  1:      -   -   -   -
  2:      -   1   -   -
  3:      -   3   3   -
  4:      -   1   2   1
codimension : 2
degree      : 8

% <d8g5.c2 x i

codimension : 4
total:      1   4   4   1
-----
  0:      1   -   -   -
  1:      -   -   -   -
  2:      -   1   -   -
  3:      -   3   2   -
  4:      -   -   2   1
codimension : 2
degree      : 8

% <d8g5.c3 x i

codimension : 4
total:      1   7   8   2
-----
  0:      1   -   -   -
  1:      -   -   -   -
  2:      -   -   -   -
  3:      -   7   8   2
codimension : 2
degree      : 8

% endmon

```

Die ersten beiden haben dabei die gleiche Hilbertfunktion, aber verschiedene Syzygientableaus. Beide liegen auf jeweils einem vollständigen Durchschnitt vom

Typ (3,4). Nach eingehender Untersuchung mit Macaulay stellt sich heraus, daß die erste Kurve zu einer Gerade und einer twisted Kubik liiert ist:

Während die zweite Kurve aber zu zwei Koniken liiert ist.

Wir wollen dieses Phänomen nun genauer untersuchen.

2.2 Satz Sei $X = C \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ wie in Korollar 1.3 und

$$\mathcal{O}_{\Gamma_i} \longleftarrow \mathcal{C}_{\Gamma_i} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longleftarrow \mathcal{B}_{\Gamma_i} \longleftarrow \mathcal{A}_{\Gamma_i} \longleftarrow 0$$

die Auflösung der einzelnen Komponenten. Dann ist die (nicht notwendig minimale) Auflösung von \mathcal{I}_C gerade

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{I}_C \longleftarrow & \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{O}(-t) & & \oplus \mathcal{C}_{\Gamma_1}^\vee(-s-t) & & \oplus \mathcal{C}_{\Gamma_1}^\vee(-s-t) & \\ & \oplus \mathcal{A}_{\Gamma_1}^\vee(-s-t) & \longleftarrow & \vdots & \longleftarrow & \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-t) \oplus \mathcal{C}_{\Gamma_2}^\vee(-s-t) & \longleftarrow 0 \\ & \vdots & & \oplus \mathcal{B}_{\Gamma_n}^\vee(-s-t) & & \vdots & \\ & \oplus \mathcal{A}_{\Gamma_n}^\vee(-s-t) & & & & \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-t) \oplus \mathcal{C}_{\Gamma_n}^\vee(-s-t) & \end{array}$$

Wieder können, falls die Auflösung nicht minimal sein sollte, nur $\mathcal{O}(-s)$ und $\mathcal{O}(-t)$ weggekürzt werden.

Beweis Da $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \emptyset$ ist, gilt $\mathcal{O}_\Gamma = \mathcal{O}_{\Gamma_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\Gamma_n}$ und die minimale Auflösung von \mathcal{O}_Γ erhält man als direkte Summe der Auflösungen der \mathcal{O}_{Γ_i} . Mit Liaison erhalten wir dann die obige Auflösung von \mathcal{I}_C . \square

Um etwas Gefühl für die Angelegenheit zu bekommen, berechnen wir die Auflösungen von \mathcal{O}_Γ für einige einfache Kurven:

2.3 Satz Ist Γ arithmetisch Cohen-Macaulay mit der minimalen freien Auflösung

$$S/I_\Gamma \longleftarrow S \longleftarrow F_1 \longleftarrow F_2 \longleftarrow 0$$

so ist

$$\mathcal{O}_\Gamma \longleftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longleftarrow \mathcal{F}_1 \longleftarrow \mathcal{F}_2 \longleftarrow 0$$

die oben betrachtete minimale freie Auflösung von \mathcal{O}_Γ .

Beweis Da Γ arithmetisch Cohen-Macaulay ist, ist $\oplus H^1 \mathcal{I}_C(-n) = 0$ und damit $\oplus H^0 \mathcal{O}_C(-n) = S/I_C$. Die zweite Auflösung erhält man dann durch Vergarben der ersten. \square

2.4 Beispiel Alle irreduziblen, glatten Kurven vom Grad ≤ 3 sind arithmetisch Cohen-Macaulay. Schauen wir uns nun an, welchen Beitrag zu Auflösung von \mathcal{I}_C diese Kurven geben, wenn sie disjunkte Komponenten der liierten Kurve sind:

Γ_i	Auflösung von \mathcal{O}_{Γ_i}	Beitrag zum Syzygientableau von I_C	insbesondere zusätzliche Erzeuger von I_C
Gerade	1 2 1 -	$\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 2 & 1 \end{array}$	1 vom Grad $(s+t-2)$
Konik	1 1 - - - 1 1 -	$\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 \end{array}$	1 vom Grad $(s+t-3)$
twisted Kubik	1 - - - - 3 2 -	$\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - \\ - & 2 & 3 & - \\ - & - & - & 1 \end{array}$	2 vom Grad $(s+t-3)$
ebene Kubik	1 1 - - - - - - - 1 1 -	$\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 1 & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 1 \end{array}$	1 vom Grad $(s+t-4)$

Mit dieser Information und dem Satz 2.2 können wir jetzt Beispiel 2.1 genauer erklären. Alle glatten irreduziblen Kurven, die zu der disjunkten Vereinigung einer Gerade und einer twisted Kubik per (3,4) liiert sind, haben nämlich das Syzygientableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 3 & 3 & - \\ - & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

während alle glatten, irreduziblen Kurven C_2 , die zu der disjunkten Vereinigung zweier Koniken per (3,4) liiert sind, das Syzygientableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 3 & 2 & - \\ - & - & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

haben. Man berechnet nämlich

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Vollständiger} & & & & & & \\
 \text{Durchschnitt} & + & \text{Gerade} & + & \text{twisted Kubic} & = & \text{Kurve 1} \\
 \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 2 & 1 \\ - & - & - & - \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 2 & 3 & - \\ - & - & - & 1 \\ - & - & - & - \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 3 & 3 & - \\ - & 1 & 2 & \not\equiv 1 \\ - & - & \mathcal{A} & - \end{bmatrix}
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Vollständiger} & & & & & & \\
 \text{Durchschnitt} & + & \text{Konic} & + & \text{Konic} & = & \text{Kurve 2} \\
 \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 \\ - & - & - & - \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 \\ - & - & - & - \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 3 & 2 & - \\ - & - & 2 & \not\equiv 1 \\ - & - & \mathcal{A} & - \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Im Satz 2.2 kommt die Syzygie vom vollständigen Durchschnitt gar nicht vor, genauso fehlt aber auch ein \mathcal{O}_P in der dritten Spalte. Man kann sich also (wie hier geschehen) vorstellen, daß sich diese Syzygie gegen das \mathcal{O}_P schräg wegkürzt.

Die so erzeugten Auflösungen der Kurven sind tatsächlich minimal, weil es gar keine Syzygien in kleinem Grad gibt, mit denen man die Erzeuger vom Grad 3 und 4 weggürzen könnte und nach dem Satz wären dies ja die einzigen Kürzungsmöglichkeiten.

Wir können also die Syzygienzahlen für Kurven mit bestimmter Geometrie berechnen und haben so eine Vorstellung vom Zusammenhang zwischen Geometrie und Syzygienzahlen. Interessant wäre aber eigentlich die Umkehrung, das heißt der Schluß von den Syzygienzahlen auf die Geometrie der Kurve. Dazu haben wir immerhin:

2.5 Satz Sei C eine Kurve mit einem r -zeiligen Syzygientableau, das die Einträge $[-1\ 2\ 1]$ in der letzten Zeile hat. Gilt das gleiche für das Syzygientableau von $\text{Gin}(I)$, so enthält jeder vollständige Durchschnitt X vom Typ (s,t) mit $s, t < r$ der C enthält auch noch eine Gerade.

Beweis Wir arbeiten wieder in generischen Koordinaten, so daß $\text{In}(I) = \text{Gin}(I)$ ist. Seien m_1, \dots, m_n die minimalen Erzeuger von $\text{In}(I)$ und f_1, \dots, f_n die zugehörige Gröbnerbasis von I mit $\text{In}(f_i) = m_i$. Ist m_n der minimale Erzeuger vom

Grad r , den es laut Voraussetzung geben muß, so ist f_n ein minimaler Erzeuger von I , weil nicht gekürzt wurde. Betrachte nun das Ideal $J = (f_1, \dots, f_{n-1})$. Wir wollen zeigen, daß $In(J) = (m_1, \dots, m_{n-1})$ ist.

Angenommen es gäbe noch weitere minimale Erzeuger von $In(J)$. Sei m_{n+1} einer derjenigen mit kleinstem Grad. Es kann nun nicht $deg(m_n) = deg(m_{n+1})$ sein, da J im Grad r echt kleinerer Dimension hat als I , also muß auch $In(J)_r$ echt kleinere Dimension als $In(I)_r$ haben. Da die Erzeuger vom Grad $\leq r$ alle noch da sind, bleibt als einzige Möglichkeit, weniger Erzeuger im Grad r zu haben. Da $In(I)$ nur einen hatte, hat $In(J)$ gar keinen. Ist nun $deg(m_{n+1}) > deg(m_n)$, dann müßte sich m_{n+1} beim Übergang von $In(J)$ zu J schräg wegekürzen, was aber nicht geht, da die darunterliegende Zeile leer ist. ($In(I)$ hat keine Erzeuger im Grad r . Weil es Borel-fixiert ist, folgt aus Satz 1.14, daß es auch keine Syzygien in dieser Zeile gibt.) Es kann also keine zusätzlichen Erzeuger von $In(J)$ geben.

Betrachte nun $m_n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Vergleicht man die Invariantenfunktion $f(i, j)$ von I mit der von J , so stellt man fest, daß sie sich nur an einer Stelle unterscheiden. Es ist nämlich

$$f_I(\alpha, \beta) = \gamma$$

während

$$f_J(\alpha, \beta) = \infty$$

ist. Aus der Gradformel (Satz 2.3) sehen wir damit:

$$Grad(J) = Grad(I) + 1$$

Da $V(I) \subset V(J) \subset X$ ist, muß $V(J) \setminus V(I)$ Grad 1 haben und damit eine Gerade enthalten. Diese ist natürlich dann auch in X . \square

§3 Die Erzeuger eines Ideals

Es gibt außer Liaison auch noch einen sehr geometrischen Grund, warum - zumindest in speziellen Fällen - zusätzliche Erzeuger benötigt werden.

Sei z.B. Γ eine n -Sekanten-Kurve von C . Betrachte dann $C \cup \Gamma$ und das zugehörige homogene Ideal $I_{C \cup \Gamma}$. Um nun von $I_{C \cup \Gamma}$ zu I_C zu kommen, benötigt man zusätzliche Erzeuger f , die auf C verschwinden, nicht jedoch auf Γ ; bzw, geometrisch gesprochen, Hyperflächen $V(f)$, die C enthalten und Γ nicht. Die Anzahl der Schnittpunkte von $V(f)$ mit Γ ist nun einerseits mindestens n , da Γ eine n -Sekanten-Kurve ist, andererseits aber nach Bertini höchstens $\deg(f) \cdot \deg(\Gamma)$. Hohe Sekantenkurven erfordern also zusätzliche Erzeuger in hohem Grad. Eine n -Sekanten-Gerade fordert also z.B. mindestens einen Erzeuger vom Grad mindestens n und eine n -Sekanten-Konic mindestens einen Erzeuger vom Grad mindestens $n/2$.

Für eine Gerade, ebene Konic, ebene Kubic und twisted Kubic im vollständigen Durchschnitt vom Typ (s, t) ergeben sich hieraus genau die gleichen Ergebnisse wie mit Liaison Argumenten (vergleiche Tabelle in Beispiel 2.4):

Γ	d_Γ	g_Γ	Schnittpunkte	zusätzliche Erzeuger
Gerade	1	0	$(s+t-2)$	1 vom Grad $(s+t-2)$
Konic	2	0	$2(s+t-3)$	1 vom Grad $(s+t-3)$
twisted Kubic	3	0	$3(s+t-3)-1$	2 vom Grad $(s+t-3)$
ebene Kubic	3	1	$3(s+t-4)$	1 vom Grad $(s+1-4)$

Die dritte Zeile bedarf vielleicht einer kurzen Erklärung. Da die twisted Kubic $3(s + t - 3) - 1$ Schnittpunkte mit der Kurve hat, muß es zunächst nur mindestens einen Erzeuger vom Grad $(s+t-3)$ geben. Dieser hat dann aber zu viele Schnittpunkte mit der Sekanten Kurve (genau einen zuviel), so daß man weitere Erzeuger braucht, um diesen ungewünschten Punkt wegzuschneiden.

Die ganze Tabelle ist als "mindestens" so viele Erzeuger von "mindestens" diesem Grad zu interpretieren.

§4 Geometrische Konstruktion

Die Überlegungen zur Liaison sind natürlich auch für die Konstruktion von Interesse. Für Grad 8 und Geschlecht 3 konnte das Syzygientableau

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

in Kapitel I nicht ausgeschlossen werden. Mit den Methoden aus Kapitel II wurde aber auch keine Kurve mit diesem Syzygientableau gefunden.

Mit Liaison sehen wir nun, daß falls es eine solche Kurve C geben sollte, die per (3,4) liierte Kurve Γ eine Auflösung von \mathcal{O}_Γ der Form $[4\ 8\ 4]$ haben muß. Dies sieht sehr nach vier disjunkten Geraden aus, und tatsächlich erhält man mit Macaulay:

```
% <random_line x l1
% <random_line x l2
% <random_line x l3
% <random_line x l4
% intersect l1 l2 l3 l4 l
0.1.2.3..4..
computation complete after degree 4
% <link x l 3 4 i
% res i fi
2.3.4.5...6...7..[1133k].8...
computation complete after degree 8
% betti fi
total:      1      6      8      3
-----
      0:      1      -      -      -
      1:      -      -      -      -
      2:      -      1      -      -
      3:      -      1      -      -
      4:      -      4      8      3
% <checkglatt i
* yes
% endmon
```

eine glatte, irreduzible Kurve mit den gewünschten Invarianten. Viele andere der in Kapitel II konstruierten Kurven konstruiert man so nocheinmal geometrisch.

Anhang A

Beispiele

In diesem Kapitel sollen einige Fragen aufgeworfen und mit Beispielen untermauert werden.

A.1 Beispiel Es gibt Ideale mit Syzygientableaus, bei denen der maximale Grad in der letzten Zeile kleiner ist, als in der vorletzten. Ein solches monomiales Ideal läßt sich leicht angeben:

```
% <ideal i aaa aab abb aac bbbb
% res i fi
2.3...4...
computation complete after degree 4
% betti fi
total:      1      5      5      1
-----
      0:      1      -      -      -
      1:      -      -      -      -
      2:      -      4      4      1
      3:      -      1      1      -
% endmon
```

Bei allen in dieser Arbeit konstruierten glatten, irreduziblen Kurven kommt dieser Effekt aber nicht vor. Es gibt jedoch eine reduzible Kurve ohne eingebettete Punkte mit dem Syzygientableau von oben. Man erhält sie aus der disjunkten Vereinigung von zwei Geraden durch liieren:

```
% <random_line x l1
% <random_line x l2
% intersect l1 l2 l
0.1.2..
```

```

computation complete after degree 2
% <link x l 4 4 j
% <link x j 4 5 i
% res i fi
2.3...4...
computation complete after degree 4
% betti fi
total:      1      5      5      1
-----
0:         1      -      -      -
1:         -      -      -      -
2:         -      4      4      1
3:         -      1      1      -
% endmon

```

Es stellt sich heraus, daß diese Kurve aus zwei disjunkten Geraden besteht, die von einer ebenen Quartic in jeweils einem Punkt geschnitten werden

```

% submat i i4
! rows ?
! columns ? 1..4
% std i4 i4
34.
computation complete after degree 4
% deg i4
codimension : 1
degree      : 1
% <random_gen x i 3 g1
% <random_gen x i 3 g2
% quot g1 g2 rest
0.1.2..
computation complete after degree 2
% quot g1 rest h
0.1..2..
computation complete after degree 2
% quot i4 h lines
0.1.2..3..
computation complete after degree 3
% res lines fl
1.2...
computation complete after degree 2
% betti fl
total:      1      4      4      1
-----
0:         1      -      -      -
1:         -      4      4      1
% <nurglatt l

```

```

* yes
% quot i lines rest
0.1..2..3..4..
computation complete after degree 4
% res rest fr
0.1.2.3.4..
computation complete after degree 4
% betti fr
total:      1      2      1
-----
      0:      1      1      -
      1:      -      -      -
      2:      -      -      -
      3:      -      1      1
% <nurglatt rest
* yes
% endmon

```

A.2 Beispiel Das erste generische Initialideal, zu dem keine glatte irreduzible Kurve gefunden werden konnte, taucht in Grad 5 und Geschlecht 0 auf. Es ist

```

% <ideal i aaa aab aac abb bbbb bbcb
% <gin i

o o o 1
o o x
1 x
x

% res i fi
2.3...4...
computation complete after degree 4
% betti fi
total:      1      6      7      2
-----
      0:      1      -      -      -
      1:      -      -      -      -
      2:      -      4      4      1
      3:      -      2      3      1
% endmon

```

Es gibt aber eine reduzible Kurve ohne eingebettete Punkte mit diesem generischen Initialideal. Man erhält sie mit der Konstruktion aus Kapitel II und generischem φ_3 :

```

% <gen6 1 1 0 0 0 0 3 4 0 0 0 0 x m
% <construct m 2 4 0 0 0 0 x i

codimension : 4
total:      1      6      7      2
-----
  0:      1      -      -      -
  1:      -      -      -      -
  2:      -      4      4      1
  3:      -      2      3      1
codimension : 2
degree      : 5

% <gin i

o o o 1
o o x
1 x
x

% <checkglatt i
* no
% endmon

```

Diese Kurve besteht nun aus einer isolierten Geraden und einer Geraden, die sich in einem Punkt mit einer ebenen Kubic schneidet.

```

% <link x i 3 4 j
% res j fj
2.3..4..5...
computation complete after degree 5
% betti fj
total:      1      5      5      1
-----
  0:      1      -      -      -
  1:      -      -      -      -
  2:      -      2      1      -
  3:      -      2      2      -
  4:      -      1      2      1
% submat j j4
! rows ?
! columns ? 1..4
% quot j4 j line
-2.-1.0.1..2..
computation complete after degree 2
% res line fl
0.1..

```

```

computation complete after degree 1
% betti f1
total:      1      2      1
-----
      0:      1      2      1
% quot i line rest
0.1.2..3..4..
computation complete after degree 4
% res rest fr
1.2..3..
computation complete after degree 3
% betti fr
total:      1      3      2
-----
      0:      1      -      -
      1:      -      2      1
      2:      -      1      1
submat rest r2
! rows ?
! columns ? 1..2
% std r2 r2
23.
computation complete after degree 3
% deg r2
codimension : 1
degree      : 1
% <random_gen x r2 2 g1
% <random_gen x r2 2 g2
% quot g1 g2 grest
0.1..
computation complete after degree 1
% quot g1 grest h
0.1..2..
computation complete after degree 2
% quot r2 h line2
0.1..2..
computation complete after degree 2
% res line2 f12
0.1..
computation complete after degree 1
% betti f12
total:      1      2      1
-----
      0:      1      2      1
% quot rest line2 kubic
0.1..2..3..
computation complete after degree 3
% res kubic fk
0.1.2.3..

```

```

computation complete after degree 3
% betti fk
total:      1      2      1
-----
      0:      1      1      -
      1:      -      -      -
      2:      -      1      1
% <nurglatt kubic
* yes
% endmon

```

A.3 Beispiel Es gibt Ideale mit Borel-fixiertem Initialideal, welche aber ein anderes (auch Borel-fixiertes) generisches Initialideal haben:

```

% <ideal i aaa aab abb aac+bbc bbbb
% std i i
34.5.
computation complete after degree 5
% in i ini
in
% <gin ini

o o o 1
o o x
1 x
x

% <gin i

o o o x
o o x
2 x
x

% endmon

```

Um zu beweisen, daß ein Ideal I ein bestimmtes monomiales Ideal J als generisches Initialideal hat, reicht es also nicht aus eine Koordinatentransformation φ anzugeben, so daß $In(\varphi(I)) = J$ ist. Und zwar auch dann nicht, wenn J Borel-fixiert ist. (Im Grunde könnten also alle mit Macaulay errechneten generischen Initialideale falsch sein. Man kann die Wahrscheinlichkeit, daß das passiert aber sehr klein machen, indem man mehrere zufällige Koordinatentransformationen ausprobiert.)

A.4 Beispiel Es gibt (modulo der obigen Bemerkung) zwei Kurven (Grad 8, Geschlecht 5) mit gleichem generischen Initialideal, die zu Kurven mit unterschiedlichem generischen Initialideal liiert sind:

```

% <d8g5.c1 x i1

codimension : 4
total:      1    5    5    1
-----
  0:        1    -    -    -
  1:        -    -    -    -
  2:        -    1    -    -
  3:        -    3    3    -
  4:        -    1    2    1
codimension : 2
degree      : 8

% <gin i1

o o o o x
o o o x
o 2 x
x x
x

% <link x i1 3 4 j1
% <gin j1

o o o
o 1
1

% <d8g5.c2 x i2

codimension : 4
total:      1    4    4    1
-----
  0:        1    -    -    -
  1:        -    -    -    -
  2:        -    1    -    -
  3:        -    3    2    -
  4:        -    -    2    1
codimension : 2
degree      : 8

% <gin i2
[755k]
o o o o x

```

```

o o o x
o 2 x
x x
x

% <link x i2 3 4 j2
% <gin j2

o o o x
o 2 x
x x
x

% endmon

```

Das generische Initialideal enthält also nicht genügend Information um den Ausgang von Liaison vorherzusagen. Einen Versuch dieses Problem zu lösen gibt Fløystad in [F1] an. Er führt höhere Initialideale ein, die diese zusätzliche Information enthalten könnten. Tatsächlich haben diese beiden Kurven verschiedene höhere Initialideale.

A.5 Beispiel Es gibt glatte Kurven (z.B. Grad 8 und Geschlecht 4), die zu Kurven mit Doppelstruktur liiert sind. (Hier eine Konik und eine Doppelgerade, die sich in einem Punkt schneiden)

```

% <d8g4.c1 x i

codimension : 4
total:      1    5    5    1
-----
0:          1    -    -    -
1:          -    -    -    -
2:          -    1    -    -
3:          -    3    3    -
4:          -    -    -    -
5:          -    1    2    1
codimension : 2
degree      : 8

% <link x i 3 4 j
[2328k]% submat i i4
! rows ?
! columns ? 1..4
% quot i4 i line
-3.-2.-1.0.1..2..
computation complete after degree 2

```

```

% betti j
total:      1      6
-----
      0:      1      -
      1:      -      -
      2:      -      5
      3:      -      1
% quot j line rest
0.1.2..3..4..
computation complete after degree 4
% betti rest
total:      1      3
-----
      0:      1      -
      1:      -      3
% quot rest line konic
0.1..2..
computation complete after degree 2
% res konic fk
0.1.2..
computation complete after degree 2
% betti fk
total:      1      2      1
-----
      0:      1      1      -
      1:      -      1      1
% <nurglatt k
* yes
% endmon

```

Glattheit und Irreduzibilität sind also keine Eigenschaften, die sich irgendwie schön unter Liaison verhalten. Daher eignet sich Liaison auch nicht besonders gut dazu, die Nichtexistenz bestimmter Kurven zu beweisen. Man müßte dazu einen umfassenden Überblick über alle möglichen Doppelstrukturen haben.

A.6 Beispiel Es gibt eine glatte irreduzible Kurve (Grad 8, Geschlecht 3), die zu einer Kurve mit genau den gleichen Invarianten (Grad, Geschlecht, Syzygien-tableau) liiert ist:

```

% <d8g3.c2 x i

codimension : 4
total:      1      5      6      2
-----
      0:      1      -      -      -

```

```

1:      -      -      -      -
2:      -      -      -      -
3:      -      5      2      -
4:      -      -      4      2
codimension : 2
degree      : 8

% <link x i 4 4 j

% res j fj
3.4..5...6...7...8...
computation complete after degree 8

% betti fj
total:      1      5      6      2
-----
0:          1      -      -      -
1:          -      -      -      -
2:          -      -      -      -
3:          -      5      2      -
4:          -      -      4      2

% endmon

```

Man kann also nicht hoffen, mittels Liaison alle Kurven hohen Grades irgendwie induktiv aus Kurven kleineren Grades konstruieren zu können.

A.7 Beispiel Es gibt Kurven mit dem gleichen Syzygientableau, die zu verschiedenen Kurven liiert sind:

```

% <random_mat 3 8 x m1
% <construct m1 2 4 0 0 0 0 x i1

codimension : 4
total:      1      6      8      3
-----
0:          1      -      -      -
1:          -      -      -      -
2:          -      -      -      -
3:          -      -      -      -
4:          -      4      -      -
5:          -      2      8      3
codimension : 2
degree      : 14

% <random_line x l1

```

```

% <random_line x 12
% <random_line x 13
% <random_line x 14
% intersect l1 l2 l3 l4 l
0.1.2.3..4..
computation complete after degree 4
% res l f1
2.3..4...5...
computation complete after degree 5
% trans f1.3 h
% res h fh
-6.-5..-4..-3....-2....-1....0....
computation complete after degree 0
% trans fh.4 m2
% <construct m2 2 4 0 0 0 0 x i2

codimension : 4
total:      1    6    8    3
-----
0:         1    -    -    -
1:         -    -    -    -
2:         -    -    -    -
3:         -    -    -    -
4:         -    4    -    -
5:         -    2    8    3

codimension : 2
degree      : 14

% <link x i1 5 5 j1
% res j1 fj1
4.5...6...7...8...9...10...
computation complete after degree 10
% betti fj1
total:      1    10   13    4
-----
0:         1    -    -    -
1:         -    -    -    -
2:         -    -    -    -
3:         -    -    -    -
4:         -   10   13    4

% <link x i2 5 5 j2
% res j2 fj2
3.4.5..6...7...
computation complete after degree 7
% betti fj2
total:      1    6    7    2
-----
0:         1    -    -    -
1:         -    -    -    -

```

```

2:      -      -      -      -
3:      -      2      -      -
4:      -      2      3      -
5:      -      2      4      2
% endmon

```

Diese Kurven liegen daher auch in verschiedenen Biliaisonklassen (siehe [MDP]) und haben sogar minimale Kurven mit verschiedenen Syzygientableaus. Dies ist so, obwohl die minimale Auflösung einer Kurve die der Bilierten genau festlegt. Der Unterschied zwischen den beiden Kurven liegt darin, daß die eine eine absteigende Biliaison noch zuläßt, während es die andere nicht tut.

```

% <link x j2 4 4 i3
% res i3 fi3
2.3.4...5...6...7...
computation complete after degree 7
% betti fi3
total:      1      6      8      3
-----
0:      1      -      -      -
1:      -      -      -      -
2:      -      2      -      -
3:      -      4      8      3
% endmon

```

A.8 Beispiel

Es gibt "glatte" Kurven, die isolierte Punkte haben:

```

% <random_mat 1 3 x punkt
% <random_tkubic x l
% intersect l punkt i
0.1.2..3..
computation complete after degree 3
% res i fi
1.2.3...
computation complete after degree 3
% betti fi
total:      1      3      3      1
-----
0:      1      -      -      -
1:      -      2      -      -
2:      -      1      3      1
% <nurglatt i
* yes
% <checkglatt i

```

```
* no
% endmon
```

Man muß also bei der Anwendung des Jakobikriteriums immer auch zusätzlich noch überprüfen, ob $\text{coker}\varphi_3^V$ endliche Länge hat, selbst wenn man weiß, daß die Kurve nur eine Komponente der Kodimension 2 hat.

Anhang B

Pascal Files

Dieser Arbeit angefügt ist eine Diskette im MS-DOS Format, auf der die Pascalprogramme gespeichert sind, die in Kapitel I und II verwendet wurden.

Es handelt sich dabei zunächst um zwei Units (`find.pas` und `vektor.pas`) mit Prozeduren, die von allen anderen Programmen verwendet werden. Des weiteren gibt es eine Reihe von Programmen, die Listen von möglichen Bettitableaus erzeugen und verarbeiten:

`fromcook` rechnet zu einer Liste von generischen Initialidealen nach Satz 1.14 jeweils die Syzygientableaus und nach Satz 2.3 den Grad und das Geschlecht aus. Diese Syzygientableaus werden dann in eine Reihe von Files der Form `d*g*.cok` gespeichert, so daß alle Tableaus mit gleichem Grad und Geschlecht in einem File stehen.

`notwo` löscht doppelte Syzygientableaus und speichert die gekürzte Liste in `d*g*.noc`.

`cancel` kürzt die Syzygien der generischen Initialideale auf alle möglichen Weisen, so daß nach Satz 1.5 alle Syzygientableaus von irreduziblen Kurven vom Grad ≤ 8 darunter sein müssen. Die gekürzten Tableaus werden in `d*g*.can` gespeichert.

`notwo` löscht dann auch hier die doppelten Syzygientableaus. Das Ergebnis steht in `d*g*.no`.

`findred` nutzt Satz 4.2 aus und teilt die Syzygientableaus in notwendig reduzible (`d*g*.red`) und den Rest (`d*g*.rr`) auf.

`findpoint` macht das gleiche mit Satz 5.4 und speichert die Syzygientableaus mit notwendig eingebetteten Punkten in `d*g*.pnt` und den Rest in `d*g*.rp`.

`stat` macht dann die Statistischen Auswertungen nach Grad und Geschlecht, die in dieser Arbeit mehrmals zur Übersicht eingefügt wurden. In Kapitel I hatten wir

Statistik	Befehl
2.8	stat *.cok
3.1	stat *.noc
3.2	stat *.no
4.3	stat *.red
4.4	stat *.rr
5.5	stat *.pnt
5.6	stat *.rp

Zum Konstruieren in Kapitel II werden mit `findrand` einige Tableaus herausgesucht, bei denen es wahrscheinlicher erscheint, daß sie mit generischen Matrizen erzeugt werden können. Diese werden in `d*g*.ran` gespeichert. Alle Syzygientableaus auszuprobieren würde zu lange dauern. Genauso sucht `find2` diejenigen Tableaus heraus, die eine der in §4 vorgeschlagenen $2 \times n$ -Matrizen gebrauchen könnten (`d*g*.2`). Schließlich findet `findcm` die Syzygientableaus die zu ACM Kurven gehören müssen (d.h. keine Einträge in der letzten Spalte). Gespeichert werden diese in `d*g*.cm`.

Nach dieser Vorsortierung werden aus den Syzygientableaus die passenden Macaulayscripts erzeugt. (`sran` erzeugt `d*g*.sra`; `s2` erzeugt `d*g*.s2` und `scm` erzeugt `d*g*.scm`)

Die Scripts sehen dann so aus:

Für `sran` z.B.:

```
<gen6 1 0 0 0 0 0 4 0 0 0 0 0 x m
<construct m 3 0 1 0 0 0 x i
<checkglatt i
shout echo * 0,0,1,0,3/0,0,0,0,4/0,0,0,0,1/
```

für `s2` z.B.:

```
<mat252 m
<gen6 2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 x m1
concat m m1
<construct m 2 2 1 0 0 0 x i
<checkglatt i
shout echo * 0,0,0,1,2,2/0,0,0,0,1,5/0,0,0,0,0,2/
```

und schließlich für `scm` z.B.:

```

<gen6 3 0 0 0 0 0 4 0 0 0 0 0 x m
<cohen_mac m x i
<nurglatt i
shout echo * 0,0,0,4/0,0,0,3/0,0,0,0/

```

Man beachte, daß <checkglatt entweder * yes oder * no ausgibt, so daß das Protokoll der Maculaysitzung dann so aussieht

```

% <d8g4.s2
* D8G4.2Y

codimension : 4
total:      1      6      7      2
-----
  0:      1      -      -      -
  1:      -      -      -      -
  2:      -      1      -      -
  3:      -      2      2      -
  4:      -      3      5      2
codimension : 2
degree      : 8

* no
* 0,0,0,1,2,3/0,0,0,0,2,5/0,0,0,0,0,2/

codimension : 4
total:      1      5      6      2
-----
  0:      1      -      -      -
  1:      -      -      -      -
  2:      -      1      -      -
  3:      -      2      1      -
  4:      -      2      5      2
codimension : 2
degree      : 8

* yes
* 0,0,0,1,2,2/0,0,0,0,1,5/0,0,0,0,0,2/

codimension : 3
total:      1      4      5      2
-----
  0:      1      -      -      -
  1:      -      -      -      -
  2:      -      1      -      -
  3:      -      2      -      -
  4:      -      1      5      2

```

```

codimension : 2
degree      : 8

* no
* 0,0,0,1,2,1/0,0,0,0,0,5/0,0,0,0,0,2/
% endmon

```

Unter Unix wählen wir dann die *-Zeilen aus:

```

grep "^*" logfile.out

* D8G4.2Y
* no
* 0,0,0,1,2,3/0,0,0,0,2,5/0,0,0,0,0,2/
* yes
* 0,0,0,1,2,2/0,0,0,0,1,5/0,0,0,0,0,2/
* no
* 0,0,0,1,2,1/0,0,0,0,0,5/0,0,0,0,0,2/

```

so daß ein Pascalprogramm (`split`) diese Liste wieder aufteilen kann in Tableaus bei denen die Konstruktion geklappt hat und den Rest.

Wir durchlaufen diesen Zyklus zweimal. Das erste Mal wird getestet ob die Kurve auch die richtigen Syzygienzahlen hat (`<check i`) und das zweite mal werden unter diesen Kurven die glatten, irreduziblen herausgesucht (`<checkglatt i`).

`sglatt` erzeugt dann schließlich für jede gefundene glatte irreduzible Kurve ein eigenes Macaulayscript, z.B.

```

incr-set prlevel 1
if #0=2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <D8G3.c3 x i
;;;
;;; Constructs a curve of degree 8 and genus 3 with
;;; Bettitableau
;;;
;;; 1 - - -
;;; - - - -
;;; - - - -
;;; - 5 4 -
;;; - 2 4 2
;;;
incr-set prlevel 1

```

```
jump END
START:
<mat242 m
<gen6 2 0 0 0 0 0 0 4 0 0 0 0 x m1
concat m m1
<construct m 2 5 0 0 0 0 x i
spare
END:
incr-set prlevel -1
```

Anhang C

Macaulayscripts

Im Gegensatz zu den Pascalfiles geben wir für die Macaulayscripts die vollständigen Ausdrücke an (obwohl sie auch auf der Diskette sind), in der Hoffnung, daß sie für algorithmisch denkende Leser die Konstruktionsmethoden transparenter werden lassen.

Zum Konstruieren von Matrizen haben wir

C.1 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=3 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <generic x m d
;;;
;;; Fills the matrix m with random elements of the appropriate degree.
;;; If the appropriate degree ist smaller then d a zero is taken
;;; instead.
;;;
;;; Example
;;;
;;; <generic x m 0 puts constants in degree 0 places
;;; <generic x m 1 puts zeros in degree 0 places
;;;
;;; The idea is to create a zero-matrix, use setdegs to choose the
;;; degrees and then use generic to fill it with random elements.
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @x
ncols #2 @nc
nrows #2 @nr
```

```

int @i 0
mat @m
0
0
mat @r
0
0
loopi:
  <stack @m @m @r
  if @i=@nr cleanup
  int @i @i+1
  row-degree #2 @i @rd
  mat @r
  0
  0
  int @j 0

loopj:
  if @j=@nc loopi
  int @j @j+1
  col-degree #2 @j @cd
  int @d @cd-@rd
  if @d<#3 null
  power @x @d @xx
  <random_mat 1 1 @xx @oner
  jump do_concat

null:
  mat @oner
  1
  1
  0

do_concat:
  concat @r @oner
  jump loopj

cleanup:
  rowdegs #2 @rdegs
  coldegs #2 @cdegs
  setdegs @m
  @rdegs
  @cdegs
  copy @m #2
  spare

END:
incr-set prlevel -1

```

C.2 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=14 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <gen6 a1 a2 a3 a4 a5 a6 b1 b2 b3 b4 b5 b6 x m
;;;
;;; Creates a generic Module m with betti numbers
;;;
;;; a1 b1
;;; a2 b2
;;; a3 b3
;;; a4 b4
;;; a5 b5
;;; a6 b6
;;;
;;; x is the ring.
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #(13) @x
<nullmat #1+#2+#3+#4+#5+#6 #7+#8+#9+#(10)+#(11)+#(12) @m
setdegs @m
0:#1 1:#2 2:#3 3:#4 4:#5 5:#6
1:#7 2:#8 3:#9 4:#(10) 5:#(11) 6:#(12)
<generic @x @m 1
copy @m #(14)
END:
incr-set prlevel -1
```

C.3 Programm

```
incr-set prlevel 1
if (#0=1) START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <mat251 m
;;;
;;; creates a 2 5 matrix with 1 linear Syzygy
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
mat #1
2
5
a
```

```

0
d
d
0
c
c
b
b
a
END:
incr-set prlevel -1

$;;;;;; EXAMPLE SECTION ;;;;;;;

```

und genauso

```

mat221      mat232      mat242      mat252
mat231      mat241      mat243      mat253

```

Um aus diesen Matrizen Kurven zu konstruieren haben wir

C.4 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=9 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <construct h a1 a2 a3 a4 a5 a6 x i
;;;
;;; tries to construct a curve i with Betti numbers
;;;
;;;      1 -
;;;      - -
;;;      . .
;;;      . .
;;;      - a6      and h as the dual Hartshorne-Rau-Module
;;;      - a5
;;;      . .
;;;      . .
;;;      - a1
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
<ideal #9
copy #1 @h
copy #8 @x

```

```

res @h @fh 2
int @nc #2+#3+#4+#5+#6+#7
ncols @fh.2 @nr
<nullmat @nr @nc @a
coldegs @fh.2 @ardeg
setdegs @a
@ardeg
2:#2 3:#3 4:#4 5:#5 6:#6 7:#7
;shout betti @a
<generic @x @a 0
mult @fh.2 @a @a
res @a @fa 2
;shout betti @fa

ncols @fa.2 @eins
if @eins!=1 cleanup
flat @fa.2 @i
std @h @h
std @i @i
codim @i @coi
if @coi!=2 cleanup
res @i @fi
shout echo
shout codim @h
shout betti @fi
shout deg @i
shout echo
copy @i #9

cleanup:
spare
END:
incr-set prlevel -1

```

C.5 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=3 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <cohen_mac m x i
;;;
;;; constructs a chohen-macaulay Curve with resolution
;;;
;;;                                mdual
;;; R/I <- R <- +R(-ai) <- +R(-bi)
;;;
incr-set prlevel 1

```

```

jump END
START:
<ideal @i
copy #1 @m
copy #2 @x
res @m @fm 2
flatten @fm.2 @i
std @i @i
res @i @fi
shout betti @fi
shout deg @i

cleanup:
copy @i #3
spare
END:
incr-set prlevel -1

```

Zum überprüfen ob die Konstruktion geklappt hat verwenden wir

C.6 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0>1 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <countdeg m d [result int]
;;;
;;; counts the number of columns of m that have degree d.
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
int @i 1
ncols #1 @nc
int @n 0

loop:
  if @i>@nc result
  col_degree #1 @i @cd
  int @i @i+1
  if @cd!=#2 loop
  int @n @n+1
  jump loop

result:
  if #0=2 show
  int #3 @n
  jump cleanup

```

```

show:
    shout type @n

cleanup:
    spare
END:
incr-set prlevel -1

```

C.7 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0>2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <check i a1 a2 ...
;;;
;;; checks if i has bettinumbers
;;;
;;; 1 a1
;;; - a2
;;; - a3
;;; . .
;;; . .
incr-set prlevel 1
jump END
START:
int @i 2
int @check 0

loop:
    if @i>#0 yesorno
    int @d @i-1
    int @i @i+1
    <countdeg #1 @d @n
    if @n=#(@i-1) loop
    int @check @check+1
    jump loop

yesorno:
    if @check>0 dono
    shout echo * yes
    jump cleanup
dono:
    shout echo * no

cleanup:
    spare
END:

```

```
incr-set prlevel -1
```

C.8 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=1 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <checkglatt i
;;;
;;; Checks if codim(i)=2 codim(fi.3)=4 and i is smooth
;;;
;;; Furthermore: hartshorne-rau-module has no generators in degree<1
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @i
std @i @i
codim @i @cd
if @cd!=2 NO

res @i @fi
trans @fi.3 @h
std @h @h
codim @h @cd
if @cd<4 NO

res @h @fh
trans @fh.4 @hr
min @hr @minhr
if @minhr<1 NO

jacob @i @di
det @di 2 @min
concat @min @i
std @min @min
codim @min @cd
if @cd!=4 NO

YES:
  shout echo * yes
  jump cleanup

NO:
  shout echo * no

cleanup:
```

```

    spare

END:
incr-set prlevel -1

```

C.9 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=1 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <nurglatt i
;;;
;;; Checks if i is smooth
;;;
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @i
std @i @i
codim @i @cd
if @cd!=2 NO

jacob @i @di
det @di 2 @min
concat @min @i
std @min @min
codim @min @cd
if @cd<4 NO

YES:
    shout echo * yes
    jump cleanup

NO:
    shout echo * no

cleanup:

END:
incr-set prlevel -1

```

Schließlich helfen beim untersuchen der gefundenen Kurven

C.10 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=1 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <gin i
;;;
;;; Displays a diagram for the generic initial Ideal of i. Works only
;;; over the ring x=K[a,b,c,d]
;;;
;;; Warning: Gives only very probably the Generic Initial Ideal. Even if
;;;          the result ist borel-fixed you can't be too sure, because
;;;          there are Ideals, that have borelfixed initialideals, which
;;;          are not their generic initial ideals.
incr-set prlevel 1
jump END
START:
<random_mat 1 4 x r
ev r #1 @generic_coordinates
std @generic_coordinates @generic_coordinates
in @generic_coordinates @gin
trans @gin @gin
min @gin @maxdegree
int @maxdegree -@maxdegree
trans @gin @gin
ring @r

6
abcdox

fetch @gin @gin
poly @apower 1
poly @a a
poly @abpower 1
poly @b b
mat @ss
0
0

shout echo

LOOPA:
  if @maxdegree<0 CLEANUP
  int @maxdegree @maxdegree-1
  shout type @ss
  <sporadic @gin @apower @s
  <symbol @s o x @ss
  copy @apower @abpower
  mult @apower @a @apower

```

```

int @i 0

LOOPB:
int @i @i+1
if @i>@maxdegree LOOPA
mult @abpower @b @abpower
<sporadic @gin @abpower @s
<symbol @s o x @s
concat @ss @s
jump LOOPB

CLEANUP:
shout echo
spare
setring #1

END:
incr-set prlevel -1

```

C.11 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=3 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <sporadic i m s
;;;
;;; calculates the number of sporadic Zeros that are divisible by the
;;; monomial m
;;;
;;; i has to be a borelfixed Ideal.
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
int #3 0
poly @m #2
contract @m #1 @sp
std @sp @sp
ncols @sp @nc
if @nc=0 CLEANUP
int #3 -1
mat @r
1
4
0
0

```

```

c
0
ev @r @sp @sp
flatten @sp @sp
std @sp @sp
ncols @sp @nc
if @nc=0 CLEANUP
col_degee @sp 1 #3

CLEANUP:
spare

END:
incr-set prlevel -1

```

C.12 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=4 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <symbol s x o result
;;;
;;; If s=-1 then the result is o
;;; If s=0 then the result is x
;;; otherwise result is s transformed to a polynomial
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
if #1=-1 RETURNO
if #1=0 RETURNX
poly #4 {#1}
jump END

RETURNO:
poly #4 #2
jump END

RETURNX:
poly #4 #3

END:
incr-set prlevel -1

```

C.13 Programm

```

incr-set prlevel 1

```

```

if #0=5 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <link x i a b j
;;;
;;; chooses random elements of deg a and b in i and calculates
;;; the linked curve j.
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
<random_gen #1 #2 #3 @c1
<random_gen #1 #2 #4 @c2
concat @c1 @c2
quot @c1 #2 #5
spare
END:
incr-set prlevel -1

```

C.14 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=4 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <random_gen x m d c
;;;
;;; defines a 1-column matrix c whose entry is a random combination
;;; of those columns of m that have columndegree<d
;;;
;;; the basering is x
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
ncols #2 @maxi
nrows #2 @nr
int @i 1
min #2 @mind
submat #2 @c
;
1
mat @r
1
1
0
mult @c @r @c
loop: if @i>@maxi cleanup

```

```

        submat #2 @nowc
        ;
        @i
        col_degree @nowc 1 @d
        int @d @mind-@d+#3
        <reentry #1 @d @r
        mult @nowc @r @r
        add @r @c @c
        int @i @i+1
        jmp loop
cleanup: row_degs #2 @rdg
        setdegs @c
        @rdg
        ;
        copy @c #4
; spare
END:
incr-set prlevel -1

$;;;;;;;;; EXAMPLE SECTION ;;;;;;;;;;

```

C.15 Programm

```

incr-set prlevel 1
if #0=3 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <reentry x d m
;;;
;;; returns a 1 by 1 matrix m with a random entry
;;; of degree d.
incr-set prlevel 1
jump END
START:
if #2<0 NIX
    power #1 #2 @xx
    <random_mat 1 1 @xx #3
    jump CLEANUP
NIX:
    mat #3
    1
    1
    0
CLEANUP:
    spare

END:
incr-set prlevel -1

```

Für die geometrische Konstruktion haben wir noch

C.16 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <random_line x l
;;;
;;; chooses a random-line in IP3. x=K[a,b,c,d]
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
<random_mat 1 2 #1 #2
END:
incr-set prlevel -1

$;;;;;;; EXAMPLE SECTION ;;;;;;
```

C.17 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <random_konic x k
;;;
;;; chooses a random-konic in IP3. x=K[a,b,c,d]
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @x
power @x 2 @xx
<random_mat 1 1 @x @r
<random_mat 1 1 @xx @r1
concat @r @r1
copy @r #2
spare

END:
incr-set prlevel -1
```

C.18 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <random_pqubic x q
;;;
;;; chooses a random-plane-qubic in IP3. x=K[a,b,c,d]
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @x
power @x 3 @xxx
<random_mat 1 1 @x @r
<random_mat 1 1 @xxx @r1
concat @r @r1
copy @r #2
spare

END:
incr-set prlevel -1
```

C.19 Programm

```
incr-set prlevel 1
if #0=2 START
incr-set prlevel -1
;;; Usage:
;;; <random_tqubic x k
;;;
;;; chooses a random-twisted-qubic in IP3. x=K[a,b,c,d]
;;;
incr-set prlevel 1
jump END
START:
copy #1 @x
<random_mat 2 3 @x @m
res @m @fm 2
flatten @fm.2 #2
spare

END:
incr-set prlevel -1
```

Außerdem auf der Diskette enthalten sind die Macaulyscripts zur Konstruktion

der einzelnen Kurven:

d1g0.c1	d5g1.c1	d6g3.c2	d7g1.c3	d7g5.c1	d8g3.c2	d8g4.c4	d8g9.c1
d2g0.c1	d5g2.c1	d6g4.c1	d7g2.c1	d7g6.c1	d8g3.c3	d8g5.c1	
d3g0.c1	d6g0.c1	d7g0.c1	d7g2.c2	d8g0.c1	d8g3.c4	d8g5.c2	
d4g0.c1	d6g0.c2	d7g0.c2	d7g3.c1	d8g1.c1	d8g3.c5	d8g5.c3	
d4g1.c1	d6g1.c1	d7g0.c3	d7g3.c2	d8g1.c2	d8g4.c1	d8g6.c1	
d5g0.c1	d6g2.c1	d7g1.c1	d7g4.c1	d8g2.c1	d8g4.c2	d8g7.c1	
d5g0.c2	d6g3.c1	d7g1.c2	d7g4.c2	d8g3.c1	d8g4.c3	d8g8.c1	

Anhang D

Tabellen

Anhang E

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, daß die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und nur mir den angegebenen Literaturquellen entstanden ist.

Bayreuth, den 13. Juli 2000

.....
(Hans-Christian v.Bothmer)

Literaturverzeichnis

- [BS] D. Bayer und M. Stillman, *A criterion for detecting m -regularity*, Invent. Math., 97, 1987, 1-11
- [Co] M. Cook, *The connectedness of curve invariants*, Thesis, 1993
- [Ei] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view to Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1995
- [FI] G. Fløystad, *Higher Initial Images of Homogeneous Ideals*, Preprint, 1994
- [Gr] M. Green, *Generic Initial Ideals*, Preprint, 1993
- [GLP] L. Gruson, R. Lazarsfeld, und C. Peskine, *On a Theorem of Castelnuovo, and the Equations Defining Space Curves*, Invent. Math., 72, 1983, 491-506
- [Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977
- [MDP] M. Martin Deschamps und D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque, no. 184, 185, Soc. Math. France, Paris, 1990
- [PS] C. Peskine und L. Szpiro, *Liasion des variétés algébriques*, Invent. Math., 26, 1974, 271-302
- [R] A. P. Rao, *Liaison among curves in IP^3* , Invent. Math., 1979, 205-217

Hans-Christian v.Bothmer
Gut 101
27389 Lauenbrück
04267/355

email: bothmer@btm8x5.mat.uni-bayreuth.de